

# THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD DE LYON

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean - François ARNOULD

Ingénieur I. S. I. N.

---

**CALCUL DES PLAQUES ET DES COQUES ORTHOTROPES**

**AVEC EFFET DE CISAILLEMENT**

**PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

---

Soutenue le 29 Avril 1972 devant la Commission d'Examen

MM. MATHIEU

Président

GODET

LALANNE

BAHUAUD

ZABUKOVEC

} Examineurs



# THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD DE LYON

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean - François ARNOULD

Ingénieur I. S. I. N.

---

**CALCUL DES PLAQUES ET DES COQUES ORTHOTROPES**

**AVEC EFFET DE CISAILLEMENT**

**PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

---

Soutenue le 29 Avril 1972 devant la Commission d'Examen

MM. MATHIEU

Président

GODET

LALANNE

BAHUAUD

ZABUKOVEC

}  
Examineurs



UNIVERSITE CLAUDE BERNARD

LYON

Président: M. le Professeur J.BOIDIN

1er Vice-Président: M.R.TOURAINE, Maître de Conférences agrégé.

2ème Vice-Président : M.P.PONCET, Maître-Assistant.

3ème Vice-Président : M.D.SETTELEN , Etudiant.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

UNITES

U.E.R. médicale Grange Blanche  
U.E.R. médicale Alexis Carrel  
U.E.R. médicale LYON-Nord  
U.E.R. médicale LYON-Sud-Ouest  
U.E.R. des Sciences pharmaceutiques  
U.E.R. des Techniques de Réadaptation  
U.E.R. de Biologie humaine  
U.E.R. d'Education Physique et Sportive  
U.E.R. des Sciences Odontologiques  
U.E.R. de Mathématiques  
U.E.R. de Physique  
U.E.R. de Chimie et Biologie  
U.E.R. des Sciences de la Nature  
U.E.R. de Biodynamique et Psychopédagogie  
U.E.R. de Physique nucléaire  
U.E.R. de Mécanique  
Observatoire  
Institut Universitaire de Technologie 1  
Institut Universitaire de Technologie 2

DIRECTEURS

M. le Professeur D.GERMAIN  
M. le Professeur C.GIROD  
M. le Professeur A.BERTOYE  
M. le Professeur L.TOLO  
M.M.CARRAZ, Maître de Conférences agrégé  
M. le Professeur P.MOUNIER-KUHN  
M. J.C CZYBA, Maître de Conférences agrégé  
M.J.SAPIN, Professeur E.P.S.  
M.R. VINCENT  
M.le Doyen J.BRACONNIER  
M.Le Professeur M.DUFAY  
Mle le Professeur D.GAUTHERON  
M. le Professeur L.DAVID  
M. Le Professeur R.FONTANGES  
M. Le Professeur A. SARAZIN  
M. Le Professeur J.MATHIEU  
M. Le Professeur J.H. BIGAY  
M. Le Professeur B.POUYET  
M.J.GALLET

Secrétaire Général : M.P. IZAUTE.



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41552607\\_0004](https://archive.org/details/IA41552607_0004)

### Avant- propos

Ce travail a été réalisé dans le Laboratoire de Mécanique des Structures de l' Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, dirigé par Monsieur Lalanne, Maître de Conférences. Qu'il me soit permis ici, de lui exprimer ma plus profonde gratitude pour son aide constante et ses conseils judicieux.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Professeur Mathieu en acceptant de présider le jury de ma thèse.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur Godet, Monsieur Bahuaud Maître de Conférences et Monsieur Zabukovec, Chef du Service de Calcul de Vibrations des Structures à la Société Nationale d'Etude et de Construction de Moteurs d'Aviation, pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Cette étude a été menée à bien grâce au financement de la Direction des Recherches et Moyens d'Essais que je tiens à remercier également.

Je ne saurais oublier Monsieur Gaertner qui a collaboré directement à la partie expérimentale et Madame Maddalena pour son concours amical lors de l'élaboration des divers programmes de calcul.



## I N T R O D U C T I O N

Nous nous sommes intéressés au calcul statique des plaques et coques orthotropes, dans le domaine linéaire, avec effet de cisaillement. Ces calculs ont été effectués par une méthode approchée : celle des éléments finis.

Dans le premier chapitre nous exposons la méthode des éléments finis appliquée à un problème général d'élastostatique. Après avoir défini les différentes matrices utilisées, nous indiquons le processus à suivre pour résoudre complètement une application donnée.

Dans le second chapitre nous déterminons différentes matrices raideur d'éléments rectangulaires et triangulaires d'une plaque orthotrope. Nous avons séparé les deux types de déformation, à savoir la flexion simple et l'extension longitudinale.

Dans le cas où l'élément est soumis à une charge transversale, nous introduisons l'effet de cisaillement selon la théorie de REISSNER, après avoir précisé son influence. La détermination des matrices raideur de flexion de l'élément triangulaire est générale et permet de combiner les différents termes du développement de la flèche afin d'obtenir diverses matrices raideur. En extension, nous conservons la matrice classique de raideur du triangle et nous tenons compte des équations d'équilibre dans celle du rectangle.

Dans le troisième chapitre, nous utilisons les matrices raideurs déterminées précédemment pour l'étude de plaques et de coques. Les cas traités sont de deux types. Nous comparons d'abord les résultats approchés à ceux obtenus par la résolution des équations différentielles. Ensuite, après avoir déterminé les diverses constantes élastiques du matériau utilisé ( plaque sandwich NORSIAL ), nous comparons les résultats approchés aux valeurs mesurées lors d'expériences simples. Dans le cas de coques, nous avons choisi une expérience de mise en pression intérieure d'une coque cylindrique orthotrope. La méthode d'assemblage des éléments est modifiée afin de diminuer le nombre de degrés de liberté du système et les dimensions des matrices.

En annexe, après avoir exposé les équations de déformation des plaques orthotropes et l'aspect énergétique de ces déformations (Annexe I), nous résolvons successivement certains cas de flexion (Annexe II) et d'extension longitudinale (Annexe III). L'annexe IV est consacrée à la détermination des déformations d'une coque cylindrique orthotrope. Les sous-programmes permettant de déterminer les diverses matrices de raideur sont présentées en Annexe V.

Une partie de ce travail a été réalisée dans le cadre de deux contrats passés avec la Direction des Recherches et Moyens d'Essais (329/68 et 413/69).

METHODE DES ELEMENTS FINIS.

11-Principe de la méthode:

12-Energie complémentaire de déformation:

*12.1 Energie potentielle de déformation.*

*12.2 Travail des forces extérieures.*

*12.3 Energie complémentaire de déformation.*

13-Matrices caractéristiques d'un élément:

*13.1 Choix des déformées. Matrice connexion de l'élément.*

*13.2 Matrice intégrale de l'élément.*

*13.3 Matrice raideur de l'élément.*

*13.4 Forces nodales.*

14-Assemblage des éléments-Calcul de la structure:

15-Application à des plaques et des coques:

*15.1 Changement d'axes.*

*15.2 Matrice raideur et forces nodales.*

*15.3 Formation d'un quadrangle.*

*15.4 Assemblage de la structure.*

*15.5 Résolution du système linéaire.*

L'analyse des contraintes et déformations, dans des problèmes hautement hyperstatiques ne peut être le résultat d'un calcul mathématique simple que dans des cas particuliers. L'essor considérable des moyens de calcul digital, depuis une vingtaine d'année, a favorisé le développement des méthodes de calcul approché.

Ainsi, la méthode des éléments finis, introduite par ARGYRIS [1] et développée ensuite par de nombreux auteurs [2] à [12], permet d'obtenir des solutions approchées de problèmes de minimisation de fonctionnelles dits "problèmes de champ". La formulation mathématique et les principes de cette technique ont été exposés par de nombreux auteurs tels SYLVESTER [13], ARANTES E OLIVEIRA [14], JENNINGS [15]. Cet aspect sera très brièvement abordé dans cette étude car nous nous limiterons à l'intérêt pratique et à l'interprétation physique de la méthode des éléments finis.

11 - PRINCIPE DE LA METHODE

Dans un problème élastostatique, la détermination des contraintes et déformations dans un solide (S) peut résulter de deux démarches différentes. (MANDEL [16], LOVE [17], MIKHLIN [18])

Soit l'on considère le système des relations d'équilibre et les relations contraintes - déformations et l'on résout les équations différentielles résultantes.

Soit l'on minimise une fonctionnelle  $\Phi$ , appelée énergie complémentaire de déformation dans laquelle interviennent les forces extérieures appliquées au solide. Par conséquent, cette seconde procédure permet de traiter un problème, ayant des conditions aux limites plus complexes.

La méthode des éléments finis utilise cette seconde façon de procéder, en l'appliquant non pas à tout le solide (S) comme dans la méthode de RITZ (MIKHLIN [18], [19]), mais à l'ensemble d'éléments obtenus par une discrétisation du milieu continu. Ces éléments formant le solide sont appelés éléments finis et se rejoignent en des points appelés points nodaux ou noeuds.

12- ENERGIE COMPLEMENTAIRE DE DEFORMATION -

L'énergie complémentaire de déformation est définie comme la différence entre l'énergie potentielle de déformation  $\mathcal{E}$  et le travail des forces extérieures  $\mathcal{A}$  soit  $\Phi$  cette énergie.

$$\Phi = \mathcal{E} - \mathcal{A} \quad (1.1)$$

12.1- Energie potentielle de déformation

Soit un volume élémentaire  $d\tau$  du solide (S). Les contraintes  $\{\sigma\}$  lors de déformations  $\{\epsilon\}$  dérivent d'un potentiel  $d\mathcal{E}$ , tel que

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\epsilon\} d\tau \quad (1.2)$$

<sup>t</sup>, symbole de transposition

Les relations entre contraintes et déformations étant linéaires dans le domaine élastique, cette énergie potentielle est une forme quadratique des déformations (ou des contraintes)

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t [E] \{\epsilon\} d\tau \quad (1.3.)$$

avec  $[E]$  tel que

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

Remarque: Les tenseurs contrainte et déformation sont écrits sous forme

## 12.2 Travail des forces extérieures:

L'élément de volume  $d\tau$  étant soumis à des forces de volumes  $\{\rho\}$  et des forces extérieures de surface  $\{t\}$ , le travail de ces forces lors de déplacements  $\{d\}$  s'écrit donc :

$$d\mathcal{L} = \{\rho\}^t \{d\} d\tau + \{t\}^t \{d\} ds \quad (1.4)$$

Dans cette relation, les forces et les déplacements ont des orientations identiques.

## 12.3 Energie complémentaire de déformation d'un volume $\Omega$

Le volume  $\Omega$  étant limité par une surface  $\Gamma$ , l'énergie complémentaire de déformation du solide ( $\Omega$ ) est donc;

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\epsilon\}^t [E] \{\epsilon\} d\tau - \int_{\Omega} \{\rho\}^t \{d\} d\tau - \int_{\Gamma} \{t\}^t \{d\} ds \quad (1.5)$$

Le système de contraintes réelles agissant dans ( $\Omega$ ) est celui qui rend minimal l'énergie complémentaire  $\Phi$  (Mandel [16]). Le vecteur déplacement est tel que  $\Phi$  est minimale.

D'une manière très générale, l'approximation se réduit à :

- un choix de déformées

$$\{d\} = [\psi] \{A\} \quad (1.6)$$

$\psi$  étant des fonctions continues et suffisamment dérivables et  $\{A\}$  des coefficients inconnus.

- au calcul des coefficients  $\{A\}$  tel que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_i} = 0$$

La résolution de ce système linéaire, puisque  $\Phi$  est une forme quadratique, permet de calculer les coefficients  $A_i$ . En réalité, ce ne sont pas les coefficients  $A_i$  qui sont calculés, mais les déplacements des noeuds.

### 13. MATRICES CARACTERISTIQUES D'UN ELEMENT :

Le solide étudié (S) est décomposé en un nombre fini N d'éléments  $e_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Chaque point M appartenant à l'élément  $e_i$  (ou à sa frontière) sera caractérisé par un vecteur déplacement noté  $\{d_M\}$ .

Le vecteur déplacement pourra avoir des composantes de déplacement aussi bien que de rotation.

#### 13.1 Choix des déformées - Matrice connexion de l'élément :

Les déplacements  $\{d_M\}$  de tout point M appartenant à l'élément  $e_i$  sont développés en séries finies du type

$$\{d_M\} = [\psi(M)] \{A\} \quad (1.6)$$

Les fonctions  $\psi(M)$  choisies sont en général des polynômes, mais cette restriction n'est pas obligatoire. Par exemple, KRAHULA et POLHEMUS [20] utilisent des séries de Fourier pour un problème d'élasticité plane.

Les coefficients  $\{A\}$  sont exprimés en fonction de déplacements  $\{d\}^i$ , particuliers choisis sur la frontière de l'élément ou même à l'intérieur de l'élément, en des points dits points nœuds (ARGYRIS [21], I HOLLAND [7]). Si l'élément  $e_i$  est polygonal, ces points seront, par exemple, les sommets du polygone, ce qui sera toujours notre cas par la suite.

Le nombre des coefficients  $\{A\}$  doit être un nombre égal à celui des déplacements nœuds (nombre de nœuds multiplié par le nombre de degrés de liberté de chaque point).

Toutefois, le nombre de fonctions  $\psi$  peut être augmenté et les coefficients  $\{A\}$  sont tels que l'énergie complémentaire est minimum (PIAN [22]). Cependant si les fonctions sont des polynômes, l'augmentation du degré de chaque monôme nuit à la continuité des déplacements entre deux éléments voisins. Il faudrait alors choisir des polynômes ou d'autres fonctions nulles sur la frontière de l'élément.

Si l'on repère les points nodaux par un indice  $j, j$  variant de 1 à  $m$ , les déplacements du point  $j$  seront :

$$\{d_{Mj}\} = [\Psi(M_j)] \{A\} \quad (1.7)$$

A partir de cette relation, nous pouvons donc construire une matrice  $[C]$ , dite matrice de connexion de l'élément telle que :

$$\{d\} = [C] \{A\} \quad (1.8)$$

avec

$$\{d\}^t = [ \{d_{M1}\}^t, \dots, \{d_{Mj}\}^t, \dots, \{d_{Mm}\}^t ]$$

Par suite :

$$\{A\} = [C]^{-1} \{d\} \quad (1.9)$$

Les déplacements d'un point quelconque  $M$  ( $M \in e_i$ ), sont donc exprimés en fonction des déplacements nodaux  $\{d\}$  :

$$\{d_M\} = [\Psi(M)] [C]^{-1} \{d\} \quad (1.10)$$

### 13.2 Matrice intégrale de l'élément :

Les déformations  $\{\epsilon\}$ , déduites du vecteur déplacement  $\{d_M\}$  par dérivation sont reliées aux valeurs des constantes  $\{A\}$  par :

$$\{\epsilon\} = [B] \{A\} \quad (1.11)$$

L'énergie de déformation de l'élément  $e_i$  s'écrit donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega(e_i)} \{A\}^t [B]^t [E] [B] \{A\} d\tau \quad (1.12)$$

ou encore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{A\}^t [D] \{A\} \quad (1.13)$$

$D$  est appelée matrice intégrale de l'élément.

$$[D] = \int_{\Omega(e_i)} [B]^t [E] [B] d\tau \quad (1.14)$$

Lors de la détermination de  $[D]$  pour des éléments compliqués, il peut arriver que la formulation de chaque terme  $D_{ij}$  ne soit pas aisée, sinon impossible. On peut alors utiliser une méthode d'approximation, basée sur la méthode d'intégration de GAUSS, pour calculer l'intégrale précédente [23]

### 13.3- Matrice raideur de l'élément:

Les constantes  $\{A\}$  étant exprimées en fonction des déplacements nodaux  $\{d\}$  par la relation (1.9.), l'énergie de déformation s'écrit donc :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{d\}^t [C]^{-1,t} [D] [C]^{-1} \{d\} \quad (1.15)$$

soit sous la forme plus condensée :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{d\}^t [k] \{d\} \quad (1.16)$$

avec  $[k]$ , matrice raideur de l'élément

$$[k] = [C]^{-1,t} [D] [C]^{-1} \quad (1.17)$$

### 13.4 Forces nodales :

En utilisant la relation (1.10) et l'expression du travail extérieur nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega(e_i)} \{f\}^t [\Psi(M)] [C]^{-1} \{d\} d\tau + \int_{\Gamma(e_i)} \{t\}^t [\psi(M)] [C]^{-1} \{d\} ds$$

soit

$$\mathcal{A} = \{F\}^t \{d\} \quad (1.18)$$

$\{F\}$  représente les forces nodales appliquées à l'élément  $e_i$

Elles sont déterminées par la relation suivante :

$$\{F\} = [C]^{-1,t} \left[ \int_{\Omega(e_i)} [\Psi(M)]^t \{f\} d\tau + \int_{\Gamma(e_i)} [\psi(M)]^t \{t\} ds \right] \quad (1.19)$$

## 14 - ASSEMBLAGE DES ELEMENTS- CALCUL DE LA STRUCTURE

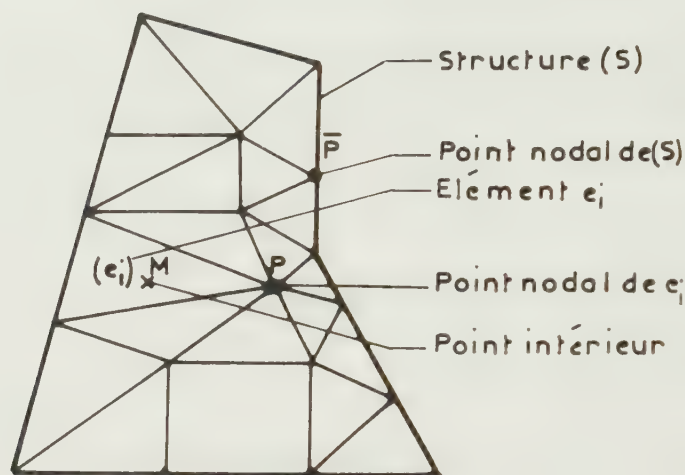


Figure 1.

La structure (S) est formée de tous les éléments  $e_i$ .

Par conséquent, l'énergie complémentaire de déformation de (S) sera la somme des énergies complémentaires de chaque élément  $e_i$

$$\Phi(S) = \sum_{i=1}^N \Phi(e_i) \quad (1.20)$$

Un point nodal P d'un élément  $e_i$  coïncide avec un point de la structure  $\bar{P}$

Les déplacements nodaux  $\{d\}^i$  de chaque élément  $e_i$  sont reliés aux déplacements de la structure  $q$ , aux mêmes points, par une relation du type:

$$\{d\}^i = [\beta]^i \{q\} \quad (1.21)$$

L'énergie complémentaire de déformation de toute la structure s'écrit, en appliquant la relation (1.20)

$$\Phi(S) = \frac{1}{2} \{q\}^t \left( \sum_{i=1}^N [\beta]^i{}^t [k]^i [\beta]^i \right) \{q\} - \sum_{i=1}^N \{F\}^i{}^t [\beta]^i \{q\}$$

élément finiHypothèse de déformées

$$\{d(x,y)\} = [\Psi(x,y)] \{A_j\}$$

$$\{d\} = [C] \{A_j\}$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{A_j\} = [T] \{d\}$$

Forces nodalesEnergie de déformation

$$\mathcal{L} = \int_{e_i} \{p(x,y)\}^t [\Psi(x,y)] \{A_j\} dx dy$$

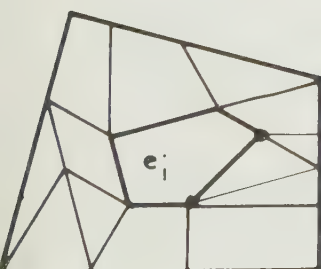
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{e_i} \{\epsilon\}^t [E] \{\epsilon\} dx dy$$

$$\mathcal{L} = \{f\}^t \{A_j\}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{A_j\}^t [D] \{A_j\}$$

$$\{F\} = [C]^{-1t} \{f\}$$

$$[k] = [C]^{-1t} [D] [C]^{-1}$$

Matrice raideur de  $e_i$ structureAssemblage des éléments

$$\{d\} = [\beta] \{q\}$$

Matrice raideur globale

$$[K] = \sum [\beta]^t [k] [\beta]$$

Forces appliquées

$$\{Q\} = \sum [\beta]^t \{F\}$$

Résolution du système

$$\{Q\} = [K] \{q\}$$

## 15 - APPLICATION A DES PLAQUES ET DES COQUES:

Nous nous sommes intéressés plus spécialement à l'étude des milieux bidimensionnels orthotropes, chargés statiquement.

Les coques sont représentées à l'aide d'éléments finis plan, ce qui revient à étudier une surface comme formée de facettes. Ce mode de représentation possède l'avantage de ne nécessiter que la connaissance des coordonnées de certains points de la coque. On évite alors la recherche problématique des rayons de courbure. Toutefois, dans des cas simples, il est possible d'utiliser des éléments gauches (G.MEGARD [24]).

Un élément  $e_i$  sera caractérisé par les matrices de raideur  $[K_f]$  en flexion et  $[K_e]$  en contraintes planes et les déplacements nodaux  $\{d_f\}$  et  $\{d_e\}$  correspondants.

$$\{d_f\}^t = [w, \phi, \theta]$$

$w$ : flèche de la surface moyenne suivant l'axe  $z$

$\left. \begin{matrix} \phi \\ \theta \end{matrix} \right\}$  rotations des sections droites autour des axes  $x$  et  $y$

$$\{d_e\}^t = [u, v, \omega]$$

$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}$  déplacements longitudinaux le long des axes  $x$  et  $y$

$\omega$ : rotation autour de l'axe  $z$

$x, y$ : axes situés dans le plan de l'élément

$z$ : axe normal à l'élément

La composante  $\omega$  apparaîtra ou n'apparaîtra pas dans l'expression de la matrice raideur selon qu'il s'agisse d'une coque ou d'une plaque.

L'assemblage des éléments de la structure se réalise de façon plus simple lorsque les déplacements et par conséquent les forces sont exprimées dans un système d'axes communs. Ce problème ne se pose pas lorsqu'il s'agit de plaques puisque les axes sont la normale à la surface moyenne  $z$  et les deux directions d'orthotropie  $x$  et  $y$ . Par contre, lors de l'étude de surfaces gauches, les éléments n'étant pas coplanaires, il y a lieu d'exprimer les matrices dans un système global  $(X, Y, Z)$ .

## 15.1 -Changement d'axes:

Si la surface gauche est quelconque, la facette approchant la coque le plus correctement possible est triangulaire.

Les directions d'orthotropie seront supposées constantes et identiques à celles du noeud 1. (Figure 2a)

Chaque point nodal  $P_i$  de l'élément ayant des coordonnées  $X_i, Y_i, Z_i$  dans le système d'axes global, les cosinus directeurs  $\alpha_z, \beta_z, \gamma_z$  de l'axe normal à l'élément,  $z$  sont définis par le produit vectoriel:  $\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}$

L'axe  $x$  de cosinus directeurs  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$  est défini par une des directions d'orthotropie.

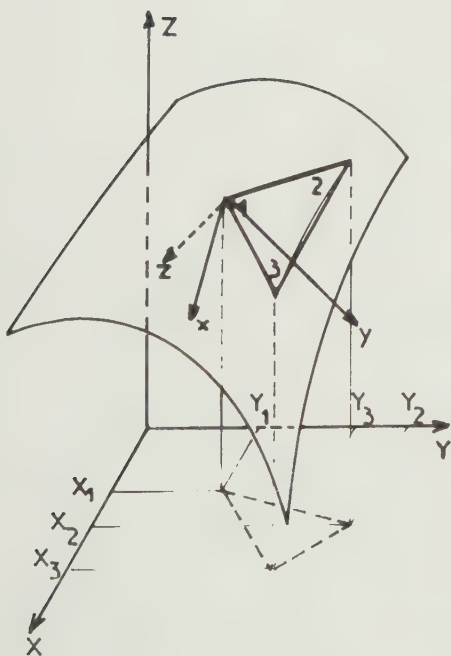
L'axe  $y$  de cosinus directeurs  $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$  est déduit de l'orthogonalité du trièdre  $x, y, z$ .

Le changement d'axes  $(X, Y, Z)/(x, y, z)$  s'écrit sous la forme:

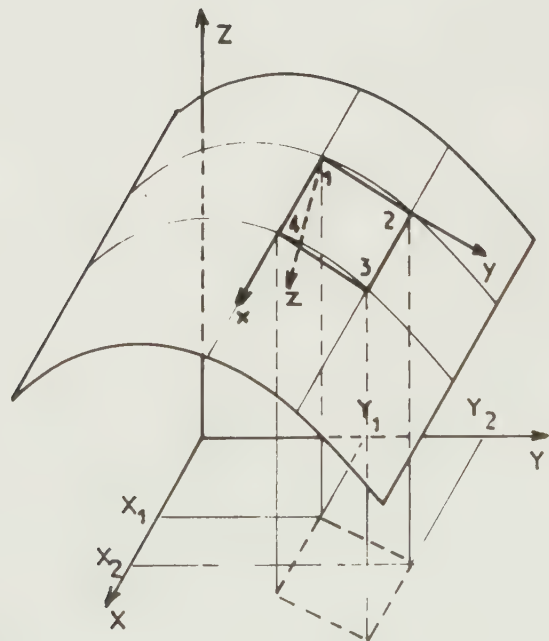
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X-X_1 \\ Y-Y_1 \\ Z-Z_1 \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

avec:

$$\begin{bmatrix} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \quad (1.30)$$



(a)



(b)

Figures 2 Eléments dans l'espace

Dans le cas particulier d'une surface réglée , par exemple , une coque cylindrique , il est possible d'utiliser des éléments rectangulaires et les cosinus directeurs sont faciles à obtenir. L'axe X étant parallèle à l'axe x d'anisotropie, les cosinus directeurs sont alors :

$$\begin{aligned} - \text{axe } x &: 1, 0, 0 \\ - \text{axe } y &: 0, \frac{Y_2 - Y_1}{H}, \frac{Z_2 - Z_1}{H} \\ - \text{axe } z &: 0, \frac{Z_2 - Z_1}{H}, \frac{Y_1 - Y_2}{H} \end{aligned}$$

$$\text{avec } H = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Les déplacements  $u, v, w$  étant dirigés suivant les axes  $x, y, z$  et les rotations  $\phi, \theta, \omega$  suivant  $-x, y, z$  se transforment dans le repère  $X, Y, Z$  en déplacements  $U, V, W$  et en rotations  $\Phi, \Theta, \Omega$  avec les mêmes conventions de signe.

Donc, les déplacements  $\{d_i\}$  et  $\{\bar{d}_i\}$  du point  $P_i$  sont reliés par :

$$\{d\} = [G] \{\bar{d}\} \quad (1.31)$$

avec

$$\{d\}^t = [w, \phi, \theta, u, v, \omega]$$

$$\{\bar{d}\}^t = [W, \Phi, \Theta, U, V, \Omega]$$

$$[G] = \begin{bmatrix} s_{33} & 0 & 0 & s_{31} & s_{32} & 0 \\ 0 & s_{11} & -s_{12} & 0 & 0 & -s_{13} \\ 0 & -s_{21} & s_{22} & 0 & 0 & s_{23} \\ s_{13} & 0 & 0 & s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{23} & 0 & 0 & s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & -s_{31} & s_{32} & 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$

$s_{ij}$  représentant le terme  $(i, j)$  de la matrice  $[S]$

## 15.2 - Matrice raideur et forces nodales dans un système d'axes global:

Compte-tenu des relations (1.22) et (1.23), la matrice raideur dans le système d'axes global (X,Y,Z) s'écrit:

$$[\bar{k}] = [L]^t \begin{bmatrix} [k_f] & 0 \\ 0 & [k_e] \end{bmatrix} [L] \quad (1.32)$$

et les forces nodales:

$$\{\bar{F}\} = [L]^t \{F\} \quad (1.33)$$

où  $[L]$  est la matrice reliant les déplacements de tous les points nodaux exprimés dans les deux systèmes d'axes.

S'il s'agit d'un triangle:

$$\{d\} = \begin{bmatrix} |G| \\ |G| \\ |G| \end{bmatrix} \quad \{\bar{d}\} = [L] \{\bar{d}\} \quad (1.34)$$

## 15.3 - Formation d'un quadrangle:

Il est plus simple, à notre avis, de diviser la structure en éléments quadrangles qui sont, soit des rectangles, soit des quadrilatères. Ces derniers sont formés de deux triangles I et II accolés de la manière indiquée ci-après. (Figure 3)

Les matrices raideurs de chaque triangle I et II sont exprimées dans le même système d'axes; les déplacements nodaux et les forces nodales sont repérés dans les mêmes axes. Il est alors possible de calculer la matrice raideur et les forces nodales correspondantes au quadrangle. Cette procédure est également adoptée par MIRZAD [25].

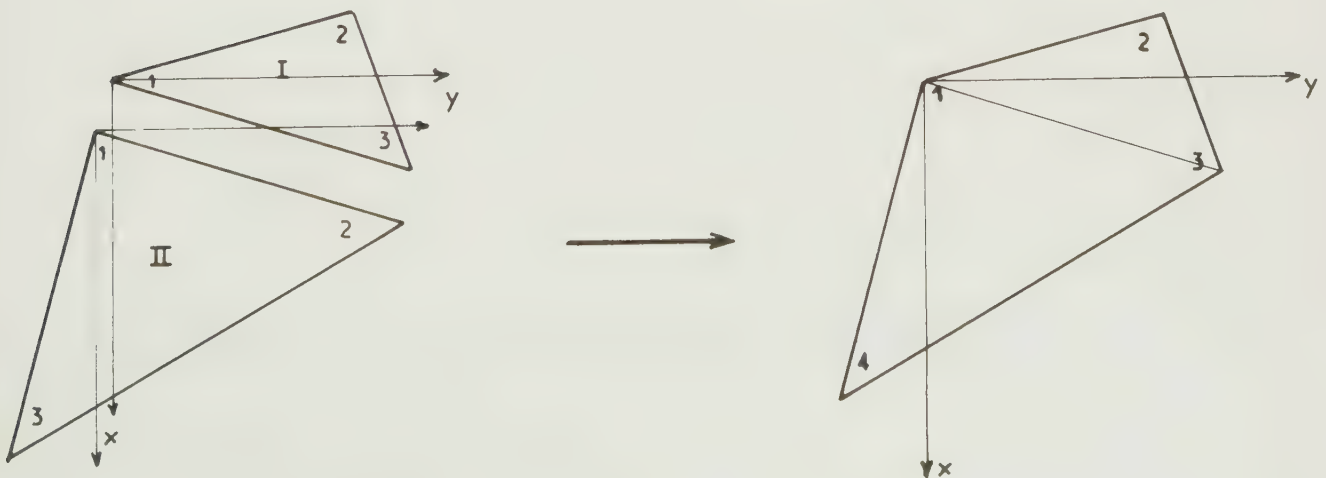


Figure 3 : Formation d'un élément quadrangle

Le triangle I possède une matrice raideur  $k^I$  telle que

$$\begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ f_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^I & k_{12}^I & k_{13}^I \\ k_{21}^I & k_{22}^I & k_{23}^I \\ k_{31}^I & k_{32}^I & k_{33}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^I \\ d_2^I \\ d_3^I \end{bmatrix}$$

et le triangle II

$$\begin{bmatrix} f_1^{II} \\ f_2^{II} \\ f_3^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{II} & k_{12}^{II} & k_{13}^{II} \\ k_{21}^{II} & k_{22}^{II} & k_{23}^{II} \\ k_{31}^{II} & k_{32}^{II} & k_{33}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{II} \\ d_2^{II} \\ d_3^{II} \end{bmatrix}$$

La continuité des déplacements aux noeuds introduit les relations suivantes :

$$d_1^I = d_1^{II} = d_1$$

$$d_3^I = d_2^{II} = d_3$$

$$d_2^I = d_2$$

$$d_3^{II} = d_4$$

$d_i$  représentant les déplacements nodaux  $i$  du quadrangle

Les forces nodales correspondant aux déplacements  $d_i$  sont alors :

$$F_1 = f_1^I + f_1^{II}$$

$$F_2 = f_2^I$$

$$F_3 = f_3^I + f_2^{II}$$

$$F_4 = f_3^{II}$$

La matrice raideur du quadrangle ainsi formé s'écrit :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^I + k_{11}^{II} & k_{12}^I & k_{13}^I + k_{12}^{II} & k_{13}^{II} \\ & k_{22}^I & k_{23}^I & 0 \\ \text{Symétrique} & & k_{33}^I + k_{22}^{II} & k_{23}^{II} \\ & & & k_{33}^{II} \end{bmatrix}$$

Le processus d'assemblage des deux triangles ne nécessite pas l'établissement de la matrice  $|\beta|$  car les matrices raideur sont exprimées dans le même système d'axes.

#### 15.4 -Assemblage de la structure.

L'assemblage de la structure à partir d'éléments quadrangles se révèle commode. Cependant dans certains cas, notamment de plaques triangulaires, il est préférable de reformer la structure à partir de triangles, selon la méthode générale.

Désignons par  $\{q_1\}$ , les déplacements généralisés d'un noeud 1 de la structure. Ces déplacements sont, évidemment les mêmes que les déplacements des points nodaux confondus avec le noeud 1 et exprimés dans le repère global. Supposons qu'il y ait  $m$  éléments  $i$  ayant un tel point nodal  $j(i)$ . Alors :

$$\{q_1\} = \{d_{j(i)}\}^i \quad i=1, \dots, m$$

De plus, les forces extérieures appliquées au noeud 1 sont égales à la somme des forces nodales de chaque élément.

$$\{Q_1\} = \sum_{i=1}^m \{F_{j(i)}\}^i$$

La matrice raideur généralisée s'obtient, alors, par addition des différents blocs selon le schéma précédent.

Cette matrice aura donc une forme symétrique, diagonale par blocs avec une largeur de bande  $L_b$ . Chaque noeud de la structure étant caractérisé, en particulier, par un numéro, alors:

$L_b = (\text{Maximum de la différence des numéros entre deux noeuds appartenant au même élément} + 1) \times (\text{nombre de degrés de liberté de chaque noeud})$

#### 15.5 - Résolution du système linéaire:

L'étape essentielle consiste à déterminer  $\{q\}$  à partir de la connaissance de  $[K]$  et  $\{Q\}$ . On doit, bien sûr, résoudre le système linéaire par exemple, par élimination de GAUSS et en tenant compte du fait que  $[K]$  est une matrice bande. [26]

Les déformations et contraintes sont immédiatement déduites des relations (1.25) et (1.27).

Chapitre II:DETERMINATION DE MATRICES RAIDEUR.

21-Hypothèses de déformées:

22-Elément rectangulaire en flexion pure:

*22.1 Choix du développement de la flèche.*

*22.2 Détermination de la matrice raideur.*

*22.3 Calcul des forces nodales.*

23-Eléments rectangulaires et triangulaires avec effet de cisaillement:

*23.1 Importance du cisaillement.*

*23.2 Détermination de matrices raideur de flexion simple.*

*23.3 Calcul des forces nodales.*

24-Eléments rectangulaires et triangulaires en extension:

*24.1 Elément rectangulaire.*

*24.2 Elément triangulaire.*

*24.3 Calcul des forces nodales.*



Il s'agit d'éléments de plaques orthotropes.

Lors de l'étude de la flexion simple, nous avons tenu compte de l'effet de cisaillement, qui, nous le montrerons par la suite, peut être important, par exemple, dans le cas de plaques (alvéolées et sandwich) et de coques.

D'autre part, nous nous limiterons à des formes triangulaires et rectangulaires et les déformées seront développées en polynômes. Dans la plupart des cas, la formulation littérale de la matrice raideur  $[k]$  est difficile, car la matrice connexion revêt une forme trop complexe pour être inversée simplement, et les expressions mathématiques seraient trop conséquentes. Cependant, à titre d'exemple, le cas de la flexion pure d'un élément rectangulaire sera entièrement développé.

## 21 - HYPOTHESES DE DEFORMEES:

Il s'agit de trouver des déplacements cernant le plus près possible les déplacements réels.

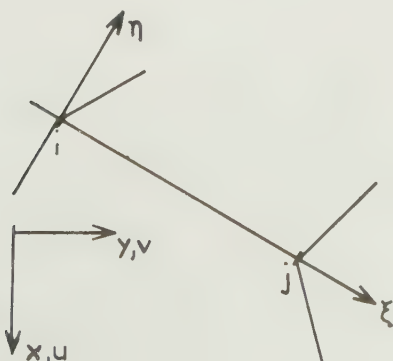
Nous allons préciser certaines conditions liées à la convergence de la méthode, car les fonctions  $[\psi(M)]$  ne peuvent être absolument quelconques.

Les deux critères fondamentaux de convergence sont: [27]

-Critère 1 :

Les déplacements doivent être continus entre les éléments adjacents.

Considérons une frontière  $i-j$  joignant les deux points nodaux  $i$  et  $j$  et un système d'axes  $(\zeta, \eta)$  d'origine le noeud  $i$  est tel que l'axe  $\zeta$  soit porté par le bord  $i-j$ .



Nous utiliserons le vecteur déplacement  $\{d_i\}$  tel que

$$\{d_i\} = [w_i, \phi_i, \theta_i] \text{ en flexion simple}$$

$$\text{et } \{d_i\} = [u_i, v_i] \text{ en extension.}$$

La continuité du vecteur déplacement entre les deux points  $i$  et  $j$  suppose que , sur l'axe  $\xi$  ,

$$w = A_1 + A_2\xi + A_3\xi^2 + A_4\xi^3 \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = B_1 + B_2\xi \quad (21.2)$$

$$u = C_1 + C_2\xi \quad (21.3)$$

$$v = D_1 + D_2\xi \quad (21.4)$$

Ces conditions sont à répéter pour chaque côté de l'élément et permettent ainsi de trouver un vecteur déplacement satisfaisant aux relations précédentes.

-Critère 2:

Tout état de déformations constantes doit être représenté dans l'élément. Cela entraîne que les premiers termes des développements de  $u, v, \phi, \theta$  doivent être linéaires.

Pour certains éléments, il ne sera pas toujours possible de satisfaire à toutes les conditions précédemment exposées et nous devrons faire un choix afin que la plupart soient réalisées, ainsi que nous le verrons plus en détail par la suite. Les expressions précédentes rejoignent les propositions faites par I. HOLLAND [7] , PRZEMIENIECKI [2] , et CLOUGH et TOCHER [28]. DUNNE [29] précise que le choix de polynômes complets est indiqué, quand on ne peut prédire les symétries du problème et ajuste le nombre de déplacements nodaux au nombre de coefficients des polynômes.

## 22. ELEMENT RECTANGULAIRE EN FLEXION PURE. -

Les relations forces-déplacements sont simplifiées du fait de l'égalité des rotations des sections droites et des pentes de la surface moyenne ( cf Annexe I ). Les déplacements de glissements  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  seront donc négligés, ce qui correspond à des modules de cisaillement  $D_{qx}$  et  $D_{qy}$  infinis.

### 22.1 Choix du développement de la flèche :

Les variables déplacements étant la flèche  $w$  et deux rotations  $\phi$  et  $\theta$ , nous sommes en présence de 12 déplacements nodaux.

Or un polygone complet de degré  $n$ , contient

$$(n + 2)(n + 1)/2$$

monomes du type  $x^i y^j$ .

Par conséquent, nous devons choisir un polynome du 4<sup>ème</sup> degré.

La plupart des auteurs, tels CLOUGH [28], amputent ce développement des termes en  $x^4$ ,  $x^2 y^2$  et  $y^4$  pour des raisons de symétrie.

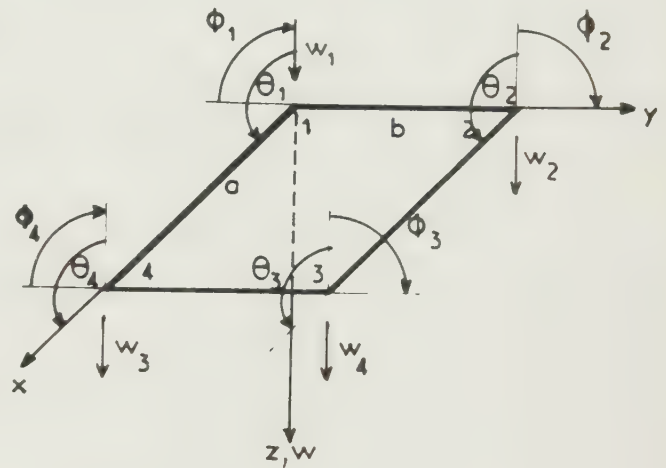


Figure 5: Elément rectangle en flexion

Si nous prenons un déplacement de la forme :

$$w = A_1 + A_2 \zeta + A_3 \eta + A_4 \zeta^2 + A_5 \zeta \eta + A_6 \eta^2 + A_7 \zeta^3 + A_8 \zeta^2 \eta + A_9 \zeta \eta^2 + A_{10} \eta^3 + A_{11} \zeta^3 \eta + A_{12} \zeta \eta^3 + A_{13} \zeta^2 \eta^2 \quad (22.1)$$

avec  $\zeta = \frac{x}{a}$  et  $\eta = \frac{y}{b}$

La condition (21.1) est réalisée, donc la flèche et la pente des bords de l'élément sont continus. En ce qui concerne la rotation autour de ces bords, c'est à dire la relation (21.2), il n'y a pas continuité de celle-ci. On voit que le critère 2 (déformations constantes) est satisfait.

Le terme  $A_{13} \zeta^2 \eta^2$  est éliminé par l'écriture des conditions

## 22.2 Détermination de la matrice raideur:

$w, \phi$  et  $\theta$  sont écrits planche (3a) en fonction de variables réduites

$$\zeta = \frac{x}{a} \text{ et } \eta = \frac{y}{b}$$

Nous en déduisons donc les matrices  $[C]$  (planche 3b),  $[B]$  (planche 3c) et  $[D]$  ( planche 3d).

Dans le cas de flexion pure, le vecteur  $[\epsilon_f]$  se réduit aux déformations de flexion pure.

$$\{\epsilon_f\}^t = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \quad (22.2)$$

D'autre part, la matrice intégrale  $[D]$  , s'exprime en fonction de constantes  $e_{ij}$  , termes de la matrice élasticité  $[E_f]$  ( planche 2 )

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{D \ x \ b}{(1-\mu_x \mu_y) a^3} & e_{22} &= \frac{D y \ a}{(1-\mu_x \mu_y) b^3} \\ e_{12} &= \frac{\mu \ x \ D y}{(1-\mu_x \mu_y) a b} & e_{33} &= \frac{D \ x y}{a b} \end{aligned} \quad (22.3)$$

$$h_{12} = e_{12} + 2e_{33}$$

$D_x, D_y, \mu_x, \mu_y, D_{xy}$  représentant les paramètres élastiques d'une plaque anisotrope ( Annexe I ).

$$[E_f] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & e_{12} \\ 0 & e_{33} & 0 \\ e_{12} & 0 & e_{22} \end{bmatrix}$$

Planche 2 : Matrice "élasticité"  $|E_f|$

Par suite des symétries du rectangle (planche 3e), la matrice raideur de flexion pure s'exprime en fonction de 24 constantes.

Ensuite, nous avons calculé les déformations (matrice  $[\bar{T}]$ ) et les efforts (matrice  $[\bar{R}]$ ) en fonction de déplacements nodaux, au centre d'inertie du rectangle.

Pour connaître les déformations et les efforts en un autre point du rectangle il suffirait de reprendre l'expression de  $[\bar{B}]$  en cet autre point.

Les matrices  $[\bar{T}]$  et  $[\bar{R}]$  sont représentées planches 3f et 3g.

### 22.3-Calcul des forces nodales:

A titre d'exemple, limitons nous à une charge uniforme  $p$ .

En ce cas, le travail des forces extérieures  $\mathcal{L}$  est

$$\mathcal{L} = \int_a^a \int_0^b p w(x, y) dx dy \quad (22.4)$$

soit

$$\mathcal{L} = \int_0^a \int_0^a p [\psi_{1j}(x, y)] \{A\} dx dy \quad (22.5)$$

Les forces nodales sont donc ;

$$\{F\} = p [C]^{-1, t} \int_0^a \int_0^b [\psi_{1j}(x, y)]^t dx dy \quad (22.6)$$

d'où

$$\{F\} = \frac{p a b}{4} \left[ 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right]^t \quad (22.7)$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ b\psi \\ a\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi\eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi\eta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2\eta & \eta^3 \end{bmatrix} \{A_i\}$$

Planche 3a: Matrice  $\Psi(x, y)$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ b\psi_1 \\ a\theta_1 \\ w_2 \\ b\psi_2 \\ a\theta_2 \\ w_3 \\ b\psi_3 \\ a\theta_3 \\ w_4 \\ b\psi_4 \\ a\theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{A_i\}$$

Planche 3b: Matrice de connexion C

$$\begin{Bmatrix} a^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ b \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ b^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6\xi & 2\eta & 0 & 0 & 6\xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\xi & 4\eta & 0 & 6\xi^2 & 6\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\xi & 6\eta & 0 & 6\xi\eta \end{bmatrix} \{A_i\}$$

Planche 3c: Matrice B

$$B_1 = 4e_{11} + 2e_{12} + 4e_{22} + \frac{14}{5} e_{33}$$

$$B_2 = b \left( e_{12} + 2e_{22} + \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_3 = a \left( 2e_{11} + e_{12} + \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_4 = 2e_{11} - 2e_{12} - 4e_{22} - \frac{14}{5} e_{33}$$

$$B_5 = b \left( 2e_{22} + \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_6 = a \left( e_{11} - e_{12} - \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_7 = -2e_{11} + 2e_{12} - 2e_{22} + \frac{14}{5} e_{33}$$

$$B_8 = b \left( e_{22} - \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_9 = a \left( e_{11} - \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_{10} = -4e_{11} - 2e_{12} + 2e_{22} - \frac{14}{5} e_{33}$$

$$B_{11} = b \left( e_{22} - e_{12} - \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_{12} = a \left( 2e_{11} + \frac{e_{33}}{5} \right)$$

$$B_{13} = b^2 \left( \frac{4}{15} e_{33} + \frac{4}{3} e_{22} \right)$$

$$B_{14} = ab \left( e_{12} \right)$$

$$B_{15} = b^2 \left( 2e_{22} - \frac{e_{33}}{15} \right)$$

$$B_{16} = B_{18} = B_{20} = 0$$

$$B_{17} = b^2 \left( \frac{e_{22}}{3} + \frac{e_{33}}{15} \right)$$

$$B_{19} = b^2 \left( 2e_{22} - \frac{4}{15} e_{33} \right)$$

$$B_{21} = a^2 \left( \frac{4}{3} e_{11} + \frac{4}{15} e_{33} \right)$$

$$B_{22} = a^2 \left( \frac{2}{3} e_{11} - \frac{4}{15} e_{33} \right)$$

$$B_{23} = a^2 \left( \frac{e_{11}}{3} + \frac{e_{33}}{15} \right)$$

$$B_{24} = a^2 \left( \frac{2}{3} e_{11} - \frac{e_{33}}{15} \right)$$



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{4}{ab} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2b} & -\frac{4}{ab} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2b} & \frac{4}{ab} & -\frac{1}{2a} & -\frac{1}{2b} & -\frac{4}{ab} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2b} \\ 0 & -\frac{1}{2b} & 0 & 0 & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & -\frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix} \{d\}$$

Planche 3f: Matrice [T]

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}^t = \{d\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4e_{33} & -\frac{6e_{11}}{b} & -\frac{6e_{22}}{a} \\ \frac{ae_{12}}{2} & \frac{b^2e_{22}}{2a} & 2be_{33} & -h_{12} & -\frac{3be_{22}}{a} \\ \frac{a^2e_{11}}{2b} & \frac{be_{12}}{2} & 2ae_{33} & -\frac{3ae_{11}}{b} & -h_{12} \\ 0 & 0 & -4e_{33} & -\frac{6e_{11}}{b} & \frac{6e_{22}}{a} \\ -\frac{ae_{12}}{2} & -\frac{b^2e_{22}}{2a} & 2be_{33} & h_{12} & -\frac{3be_{22}}{a} \\ \frac{a^2e_{11}}{2b} & \frac{be_{12}}{2} & -2ae_{33} & -\frac{3ae_{11}}{b} & -h_{12} \\ 0 & 0 & 4e_{33} & \frac{6e_{11}}{b} & \frac{6e_{22}}{a} \\ -\frac{ae_{12}}{2} & -\frac{b^2e_{22}}{2a} & -2be_{33} & -h_{12} & -\frac{3be_{22}}{a} \\ -\frac{a^2e_{11}}{2b} & -\frac{be_{12}}{2} & -2ae_{33} & -\frac{3ae_{11}}{b} & -h_{12} \\ 0 & 0 & -4e_{33} & \frac{6e_{11}}{b} & -\frac{6e_{22}}{a} \\ \frac{ae_{12}}{2} & \frac{b^2e_{22}}{2a} & -2be_{33} & h_{12} & -\frac{3be_{22}}{a} \\ -\frac{a^2e_{11}}{2b} & -\frac{be_{12}}{2} & 2ae_{33} & -\frac{3ae_{11}}{b} & -h_{12} \end{bmatrix}$$

## 23 - ELEMENTS RECTANGULAIRES ET TRIANGULAIRES AVEC EFFET DE CISAILLEMENT

Nous nous proposons de déterminer une matrice raideur qui tient compte de l'effet de cisaillement.

### 23.1 Importance du cisaillement:

Il intervient, en général, aussi bien sur les forces que sur les déplacements. L'influence du cisaillement a été **largement** développée par E. REISSNER [30], [31], [32] dans le cas de plaques isotropes et homogènes.

La variation des flèches se traduit par la relation:

$$\frac{\Delta w}{w_0} = \alpha k \quad (23.1)$$

et celle des moments par:

$$\frac{\Delta M}{M_0} = -\beta k \quad (23.2)$$

où  $w_0$  et  $M_0$  sont la flèche et le moment sans cisaillement.

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes dépendant:

- de la forme de la plaque
- de la façon dont la charge est appliquée
- des conditions aux limites.

Il nous est apparu intéressant d'indiquer, dans certains cas, l'importance de cet effet.

- Plaques homogènes et isotropes:

$$k = 0,2 \frac{h}{S} \quad (23.3)$$

$S$ , surface de la plaque.

Dans le cas de plaques rectangulaires ou circulaires, appuyées sur leur frontière,  $\beta = 0$ .

Dans le cas de plaques circulaires, encastrées, sous une charge variant linéairement, SOUCHET [33] a montré, récemment, que la variation du moment d'encastrement pouvait être de 20 à 30 %.

- Plaques anisotropes:

$$k = \frac{1}{\ell^2} \frac{D}{D_q} \quad (23.4)$$

Pour une plaque dont la section a la forme indiquée sur la figure 6, par exemple,  $k$  est environ 6 fois plus important que pour la même plaque homogène.

$$k = 0,2 \frac{6 + \frac{h}{p}}{1 + \frac{h}{p}} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \quad (23.5)$$

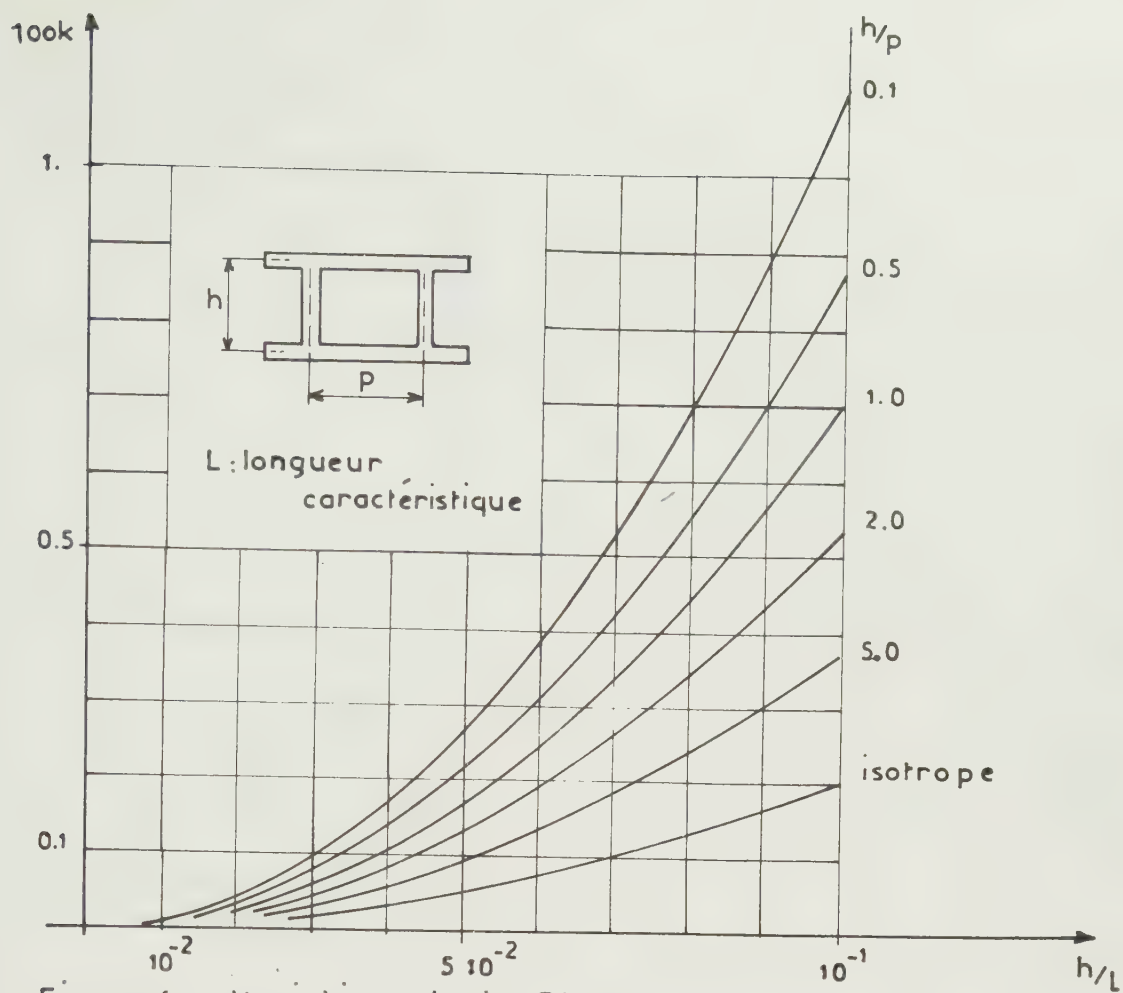


Figure 6 Variations de  $k$  - Plaque

Pour les coques, le coefficient  $k$  est généralement plus important. [34]

- Coque isotrope, cylindrique:

$$k = 0,7 \frac{h}{r} \quad (23.6)$$

$r$ , rayon de la coque.

- Coque anisotrope, cylindrique:

$$k = \frac{\sqrt{D_x E_y}}{r D_{qx}} \quad (23.7)$$

Pour une coque, ayant une section du type indiqué sur la figure 7,

$$k = 1,6 \frac{h}{r} \sqrt{\frac{6 + \frac{h}{p}}{1 + \frac{h}{p}}} \quad (23.8)$$

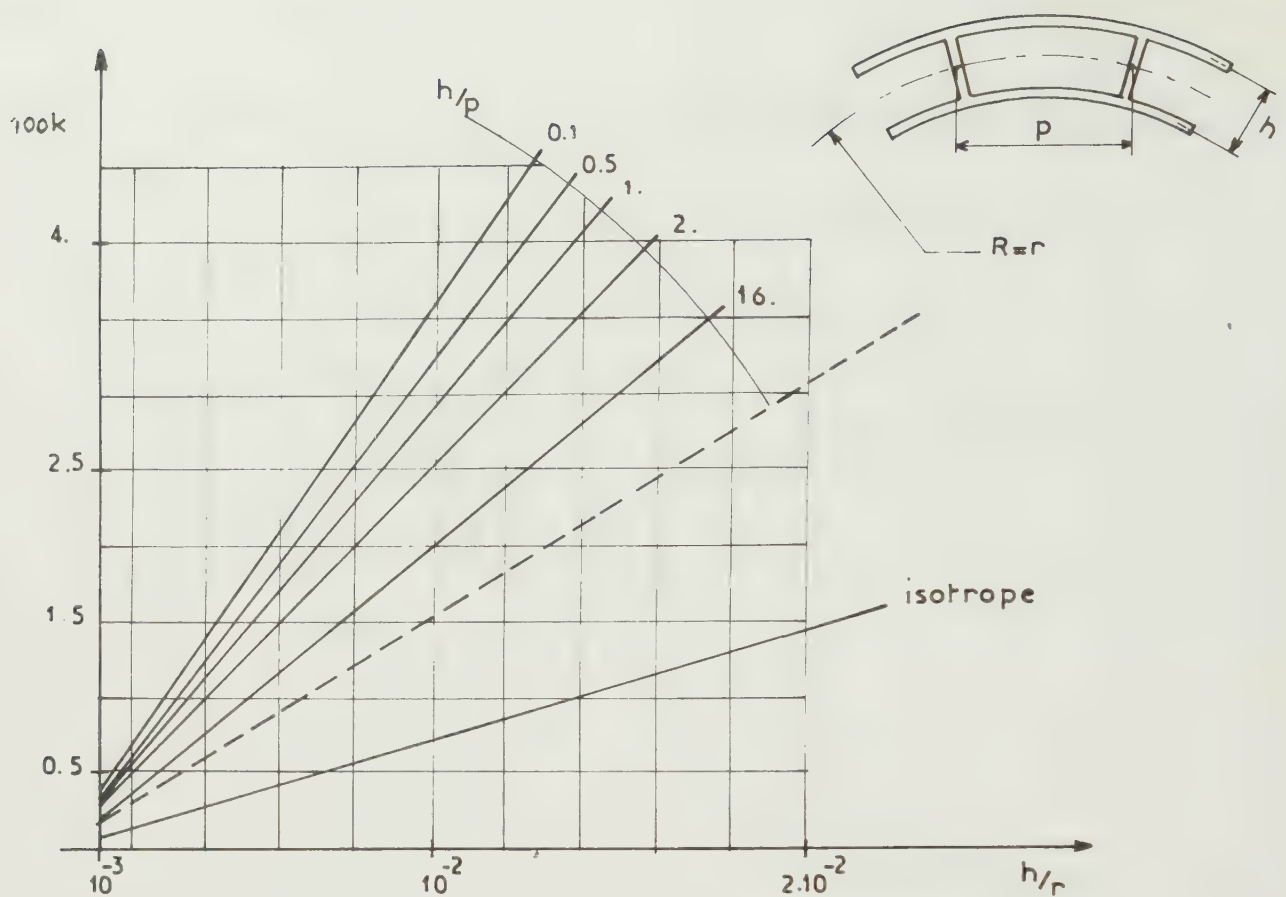
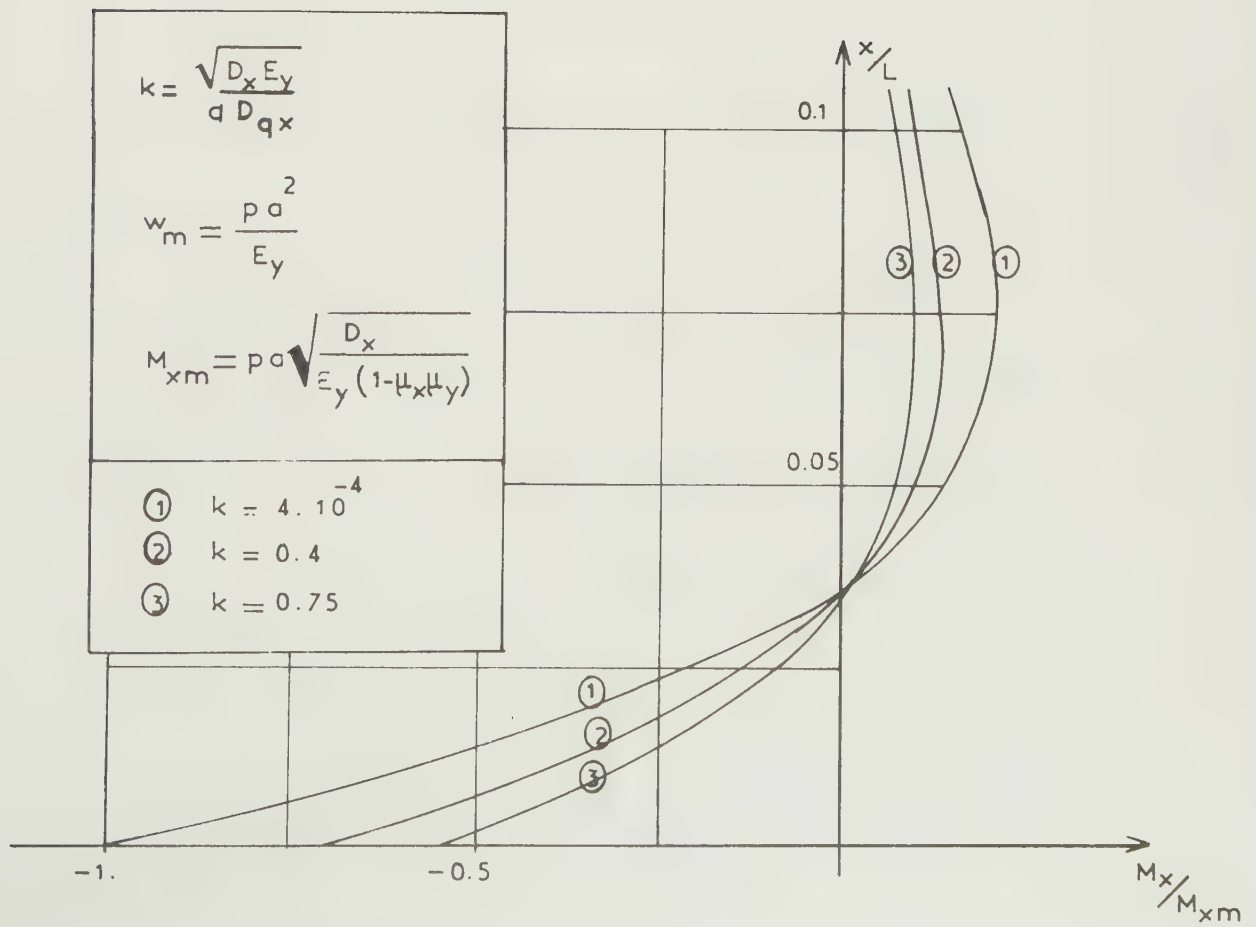
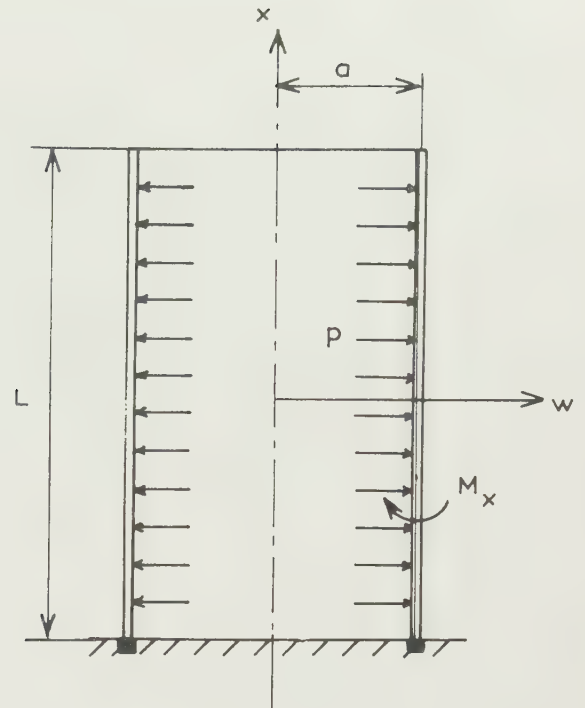
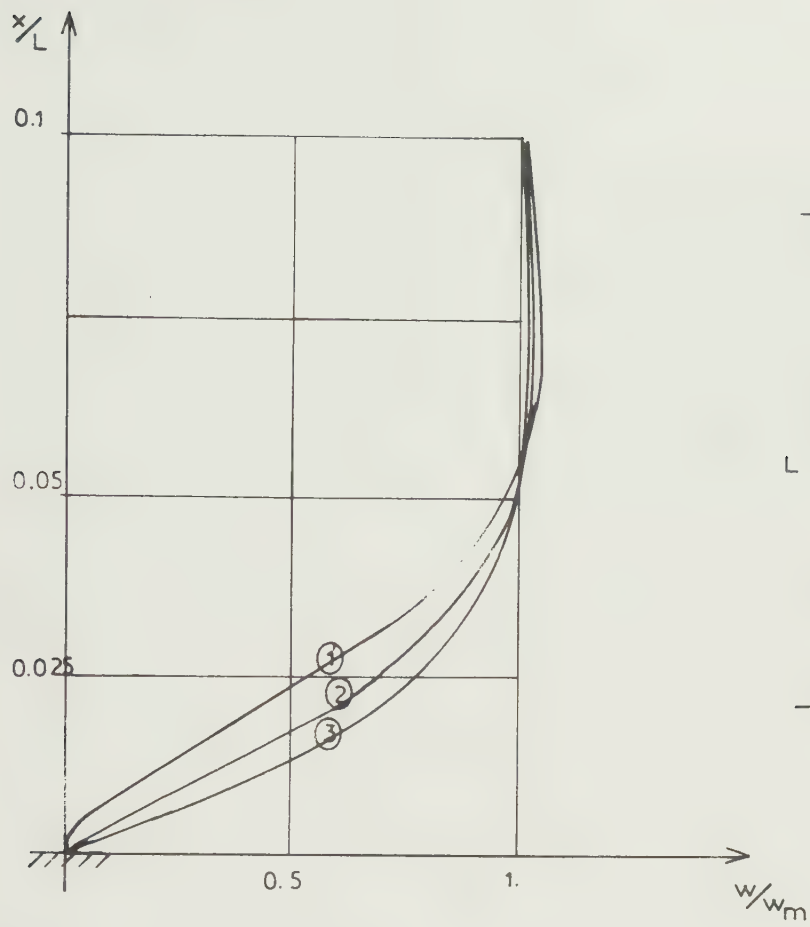


Figure 7 Variations de  $k$  - Coque cylindrique circulaire

L'effet se répercute principalement près des encastrements.

Nous avons présenté les variations de la flèche et du moment pour un cylindre construit en sandwich NORSIAL, encastré à une extrémité et libre à l'autre, soumis à une pression intérieure  $p$ . (Figure 8)

Nous remarquons donc que, surtout dans le cas de coques alvéolées et sandwich, les variations entre les résultats obtenus selon la théorie de REISSNER et ceux obtenus par la méthode classique sont assez importants.



### 23.2-Détermination de matrices raideur de flexion simple.

Nous avons groupé les calculs des matrices raideur du rectangle et du triangle, car dans le cas de flexion simple, ainsi que nous le verrons, la matrice C ne peut être inversée de façon littérale, sans entraîner des calculs inutiles. D'autre part, ces deux matrices ne diffèrent dans leur formulation que par l'intégration sur l'élément requise pour la détermination de la matrice intégrale.

Soit le développement suivant, identique à celui utilisé précédemment (§ 22)

$$W = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^i A_k \xi^{i-j} \eta^j + A_{11} \xi^3 \eta + A_{12} \xi \eta^3 \quad (23.9)$$

avec  $k = j + i(i-1)/2$ .

$$\xi = x/a$$

$$\eta = y/b$$

L'examen des continuités a été fait précédemment

La fonction des forces U (cf annexe I) correspondant à cette déformée est donc du second ordre et s'écrit :

$$U = B_2 \xi + B_3 \eta + B_4 \xi^2 + B_5 \xi \eta + B_6 \eta^2 \quad (23.10)$$

Elle est utilisée pour l'introduction de l'effet de cisaillement.

En identifiant les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  dans les équations de couplage

$$B_2 = 6e_{22} A_{10} + 2h_{12} A_8$$

$$B_3 = -(6e_{11} A_7 + 2h_{12} A_9)$$

$$B_4 = 3(h_{12} A_{11} + e_{22} A_{12})$$

$$B_5 = 0$$

$$B_6 = 3(e_{11} A_{11} + h_{12} A_{12})$$

Les coefficients  $e_{ij}$  et  $h_{12}$  étant déterminés par les relations (22.3)

Comme nous introduisons l'effet de cisaillement, le vecteur déplacement constitué de:

-la flèche  $w$ ,

-les rotations des sections droites, qui sont alors différentes des pentes de la surface moyenne

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{Q_y}{D_{qy}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{Q_x}{D_{qx}}$$

est exprimé en fonction de 12 constantes  $A_i$  ( planche 4a ).

Dans [35], les auteurs utilisent un vecteur déplacement plus complexe avec  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  en sus.

Les déformations ( Annexe I ) ont été mises sous la forme:

$$\{ \epsilon_f \} = \left[ a^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}, ab \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), b^2 \frac{\partial \phi}{\partial y}, a \gamma_x, b \gamma_y \right]^t \quad (23.11)$$

La matrice  $[B]$  telle que  $\{ \epsilon_f \} = [B] \{ A \}$  est représentée planche 4b.

Il suffit, ensuite, d'effectuer le produit matriciel  $[B]^t [E_f] [B]$

avec:

$$[E_f] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & e_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{55} \end{bmatrix}$$

$$e_{44} = D_{qx} \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad e_{55} = D_{qy} \frac{a}{b}$$

Les intégrales intervenant lors de la détermination de la matrice intégrale seront du type:

$$Spq = \iint_e \xi^p \eta^q d\xi d\eta \quad (23.12)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ b\psi \\ a\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2+2h_{12}\frac{e_{55}}{e_{44}} & 2\xi\eta & \eta^2+2h_{12}\frac{e_{44}}{e_{55}} \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2+6e_{11}\frac{e_{44}}{e_{55}} & 2\xi\eta & 0 & 3\xi\eta^2+6e_{22}\frac{e_{55}}{e_{44}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi\eta^3 \\ \xi^3\eta \\ \eta^3 \\ \xi^3+6h_{12}\frac{\xi}{e_{55}} \\ 3\xi^2\eta+6e_{11}\frac{\eta}{e_{44}} \\ 3\xi\eta^2+6e_{22}\frac{\xi}{e_{55}} \\ \eta^3+6h_{12}\frac{\eta}{e_{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \end{pmatrix}$$

Planche 4a: Déformées  $[\psi]$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6\xi & 2\eta & 0 & 0 & 6\xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\xi & 4\eta & 0 & 6(\xi^2+e_{11}\frac{h_{12}}{e_{44}}e_{55}) & 6(\eta^2+e_{22}\frac{h_{12}}{e_{55}}e_{44}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\xi & 6\eta & 0 & 6\xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_{12}\frac{e_{44}}{e_{55}} & 0 & -6e_{11}\frac{\eta}{e_{44}} & -6h_{12}\frac{\eta}{e_{44}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_{12}\frac{\xi}{e_{55}} & 0 & -6e_{22}\frac{\xi}{e_{55}} & -6h_{12}\frac{\xi}{e_{55}} & -6e_{22}\frac{\xi}{e_{55}} \end{bmatrix}$$

Planche 4b: Matrice  $[B]$

La matrice D s'écrit:

$$D(4,4) = 4 e_{11} S_{00}$$

$$D(5,5) = 4 e_{33} S_{00}$$

$$D(4,6) = 4 e_{12} S_{00}$$

$$D(6,6) = 4 e_{22} S_{00}$$

$$D(4,7) = 12 e_{11} S_{10}$$

$$D(6,7) = 12 e_{12} S_{10}$$

$$D(7,7) = 36 e_{11} \left( S_{20} + \frac{e_{11} S_{00}}{e_{44}} \right)$$

$$D(4,8) = 4 e_{11} S_{01}$$

$$D(5,8) = 8 e_{33} S_{10}$$

$$D(6,8) = 4 e_{12} S_{01}$$

$$D(7,8) = 12 e_{11} S_{11}$$

$$D(8,8) = 4 e_{11} S_{02} + 16 e_{33} S_{20} + 4 \frac{h_{12}^2}{e_{55}} S_{00}$$

$$D(4,9) = 4 e_{12} S_{10}$$

$$D(5,9) = 8 e_{33} S_{01}$$

$$D(6,9) = 4 e_{22} S_{10}$$

$$D(7,9) = 12 \left( e_{12} S_{20} + \frac{e_{11} h_{12} S_{00}}{e_{44}} \right)$$

$$D(8,9) = 4(4e_{33} + e_{12}) S_{11}$$

$$D(9,9) = 4(4e_{33} S_{02} + e_{22} S_{20} + \frac{h_{12}^2 S_{00}}{e_{44}})$$

$$D(4,10) = 12 e_{12} S_{01}$$

$$D(6,10) = 12 e_{22} S_{01}$$

$$D(7,10) = 36 e_{12} S_{11}$$

$$D(8,10) = 12 \left( e_{12} S_{02} + \frac{e_{22} h_{12}}{e_{55}} S_{00} \right)$$

$$D(9,10) = 12 e_{22} S_{11}$$

$$D(10,10) = 36 e_{22} \left( S_{02} + \frac{e_{22}}{e_{55}} S_{00} \right)$$

$$D(4,11) = 12 e_{11} S_{11}$$

$$D(5,11) = 12 e_{33} \left( S_{20} + \frac{e_{11}}{e_{44}} + \frac{h_{12}}{e_{55}} \right) S_{00}$$

$$D(6,11) = 12 e_{12} S_{11}$$

$$D(7,11) = 36 e_{11} \left( S_{21} + \frac{e_{11}}{e_{44}} S_{01} \right)$$

$$D(8,11) = 12 \left( e_{11} S_{12} + 2e_{33} S_{30} + \left( \frac{2e_{11}e_{33}}{e_{44}} + \frac{h_{12}}{e_{55}} (4e_{33} + e_{12}) \right) S_{00} \right)$$

$$D(9,11) = 12 \left( h_{12} S_{21} + \left( \frac{e_{11}}{e_{44}} (4e_{33} + e_{12}) + 2 \frac{e_{33}h_{12}}{e_{55}} \right) S_{01} \right)$$

$$D(10,11) = 36 \left( e_{12} S_{12} + \frac{e_{22}h_{12}}{e_{55}} S_{10} \right)$$

$$D(11,11) = 36 \left( e_{33} S_{40} + e_{11} S_{22} + \frac{e_{11}^2}{e_{44}} S_{02} + \left( \frac{2e_{33}e_{11}}{e_{44}} + \frac{h_{12}}{e_{55}} (4e_{33} + e_{12}) \right) S_{20} + \dots \right. \\ \left. \dots e_{33} \left( \frac{e_{11}}{e_{44}} + \frac{h_{12}}{e_{55}} \right)^2 S_{00} \right)$$

$$D(4,12) = 12 e_{12} S_{11}$$

$$D(5,12) = 12 e_{33} \left( S_{02} + \left( \frac{h_{12}}{e_{44}} + \frac{e_{22}}{e_{55}} \right) S_{00} \right)$$

$$D(6,12) = 12 e_{22} S_{11}$$

$$D(7,12) = 36 \left( e_{12} S_{21} + \frac{e_{11}h_{12}}{e_{44}} S_{00} \right)$$

$$D(8,12) = 12 \left( h_{12} S_{12} + \left( \frac{2e_{33}h_{12}}{e_{44}} + \frac{e_{22}}{e_{55}} (4e_{33} + e_{12}) \right) S_{10} \right)$$

$$D(9,12) = 12 \left( 2e_{33} S_{03} + e_{22} S_{21} + \left( \frac{2e_{22}e_{33}}{e_{55}} + \frac{h_{12}}{e_{44}} (4e_{33} + e_{12}) \right) S_{01} \right)$$

$$D(10,12) = 36 e_{22} \left( S_{12} + \frac{e_{22}}{e_{55}} S_{10} \right)$$

$$D(11,12) = 36 \left( (e_{33} + e_{12}) S_{22} + \left( \frac{e_{33}h_{12}}{e_{55}} + \frac{e_{11}}{e_{44}} (h_{12} + e_{33}) \right) S_{02} + \dots \right)$$

$$\dots \left( \frac{e_{33}h_{12}}{e_{44}} + \frac{e_{22}}{e_{55}} (h_{12} + e_{33}) \right) S_{20} + \left( e_{33} \frac{e_{11} + h_{12}}{e_{44}e_{55}} \frac{e_{22} + h_{12}}{e_{55}e_{44}} \right) S_{00}$$

$$D(12,12) = 36 \left( e_{33} s_{04} + e_{22} s_{22} + \frac{e_{22}^2}{e_{55}} s_{20} + \left( \frac{2e_{33}e_{22}}{e_{55}} + \frac{h_{12}}{e_{44}} (4e_{33} + e_{12}) \right) s_{02} + \dots \right. \\ \left. \dots e_{33} \left( \frac{e_{22}}{e_{55}} + \frac{h_{12}}{e_{44}} \right)^2 s_{00} \right)$$

La matrice D est symétrique et les termes non-indiqués sont nuls.

### -Elément rectangulaire:

Les paramètres a et b sont les dimensions du rectangle (figure 5)

Les points nodaux étant les sommets du rectangle, la matrice connexion [C], s'écrit sous la forme :

$$[C] = \begin{bmatrix} \psi_{ij} & (0,0) \\ \psi_{ij} & (0,1) \\ \psi_{ij} & (1,1) \\ \psi_{ij} & (1,0) \end{bmatrix} \quad (23.13)$$

Cette matrice (12,12) est inversible et les constantes {A} sont déterminées par

$$\{A\} = [C]^{-1} \{d\}$$

Les intégrales Spq intervenant dans le calcul de la matrice intégrale [D] deviennent

$$Spq = \frac{1}{(p+1)(q+1)} \quad (23.14)$$

Par conséquent, la matrice raideur est parfaitement déterminée par :

$$[k] = [C]^{-1t} [D] [C]^{-1}$$

### -Elément triangulaire:

Le polynome représentant la flèche  $w$  doit être tel qu'il possède 9 coefficients  $A_i$ .

Or un polynome complet du troisième ordre introduit 10 constantes. Il faut donc éliminer un monome du développement.

CLOUGH et TOCHER [28] reprennent l'expression d'une déformée de ADINI où le terme  $xy$  est omis.

L'éviction de ce monome supprime la possibilité de torsion constante dans l'élément, ce qui, par suite, entraîne une valeur trop grande de la rigidité de l'élément (I HOLLAND et K.BELL) [7] et diminue la convergence de la solution.

TOCHER [28] et BELL [7] proposent un développement où les termes en  $x^4y$  et  $xy^2$  sont groupés.

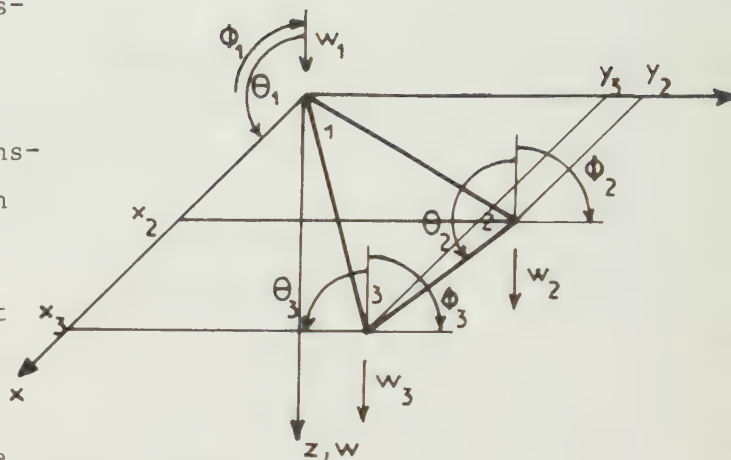
PRZEMIENIECKI [2] indique également une forme due à GALLAGHER où le terme en  $x^2y$  est supprimé.

ZIENKIEWICZ [3] utilise des développements en fonction des coordonnées d'aire, ce qui permet de conserver une certaine symétrie au point de vue géométrique

Selon la forme du triangle, certaines de ces hypothèses ne peuvent s'appliquer car la matrice connexion  $[C]$  devient singulière.

Nous avons testé plusieurs de ces cas à partir de la déformée complète à 10 coefficients.

Planche 5, nous présentons les diverses expressions et les conditions de nullité du déterminant de la matrice connexion de ces différentes déformées.



Elément triangle en flexion

Figure 9.

| Cas      | Signification | Expression du déterminant de $[C]$ $x_2 y_2 \neq 0$ |
|----------|---------------|-----------------------------------------------------|
| 1        | $A_8 = A_9$   | $m Y^2 + 2(m+1)XY + X^2 - (m+2)X - (2m+1)Y$         |
| 2        | $A_5 = 0$     | $X + Y$                                             |
| 3        | $A_8 = 0$     | $Y^2 + 2XY - X - 2Y$                                |
| 4        | $A_9 = 0$     | $X^2 + 2XY - Y - 2X$                                |
| Légende: |               | $X = x_3/x_2$ $Y = y_3/y_2$ $m = y_2/x_2$           |

Expressions de la nullité du déterminant de  $[C]$ .

Dans le cas particulier où  $x_2 y_3 = 0$ , c'est à dire lorsque l'on associe deux triangles de façon à former un rectangle, nous avons tracé le lieu des points nodaux tels que le déterminant de  $[C]$  soit nul.

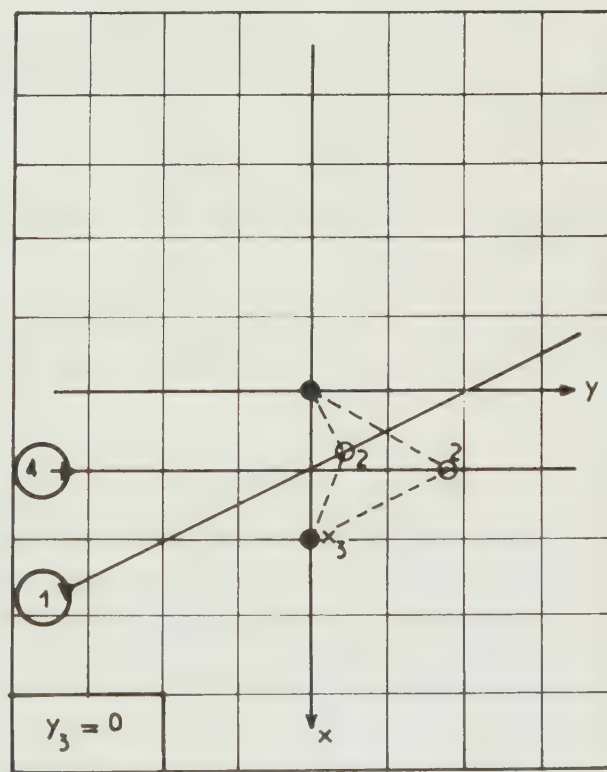
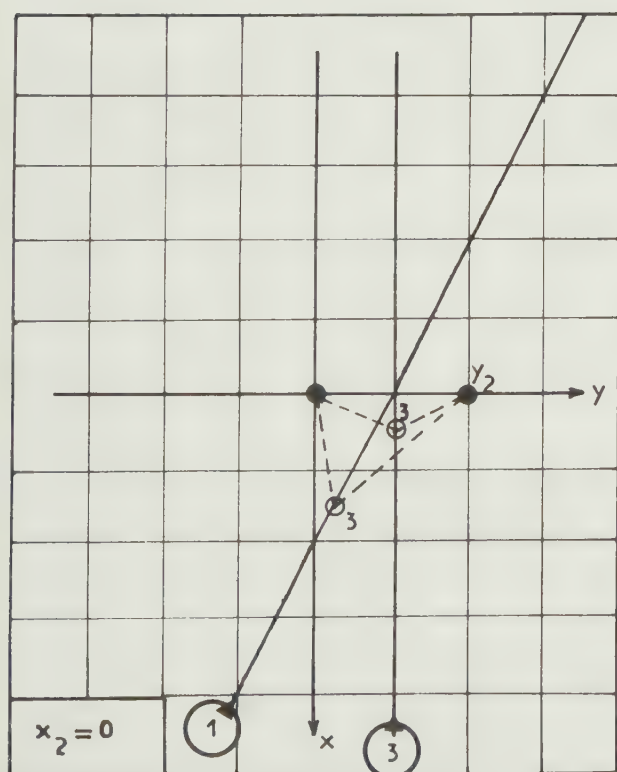


Planche 5.

Considérons le développement précédent ( planche 4<sub>a</sub> )

$$\{d(M)\} = [\psi(M)] \{A\}$$

Eliminer une constante  $A_1$  ou grouper deux termes revient à modifier la matrice  $\Psi$  de la façon suivante :

$$\{d(M)\} = [\psi(M)] [H] \{\bar{A}\} \quad (23.15)$$

L'énergie complémentaire de déformation a la même expression que précédemment mais les intégrations s'effectuent sur le triangle.

$$S_{pq} = \frac{x_2^{p-m} x_3^{m} x_2^{q-n} x_3^n}{ab} \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q \frac{p! q! (p+q-m-n)! (m+n)!}{(p+q+2)! (p-m)! m! (q-n)! n!} \frac{x_2^{p-m} x_3^m x_2^{q-n} x_3^n}{a^p b^q} \quad (23.16)$$

L'énergie complémentaire  $\Phi$  s'écrit donc :

$$\Phi = \frac{1}{2} \{A\}^t [D] \{A\} - \{f\}^t \{A\}$$

La matrice de connexion  $[C]$  se détermine de la même façon que pour le rectangle avec les déplacements nodaux indiqués sur la figure 9.

La matrice de connexion reliant ces derniers aux constantes  $\bar{A}_1$  étant  $[CH]$ , si cette matrice est inversible, alors la matrice raideur  $[k]$  devie

$$[k] = [CH]^{-1,t} [H]^t [D] [H] [OH]^{-1} \quad (23.17)$$

et les forces nodales

$$\{F\} = [CH]^{-1,t} [H]^t \{f\} \quad (23.18)$$

Afin de repérer tous les cas traités, nous avons utilisé un indice  $\ell$ , tel que pour  $\ell = 1$ , les termes  $x^2y$  et  $xy^2$  sont groupés en  $x^2y + xy^2$

pour  $\ell = 2$  le terme  $xy$  est supprimé

pour  $\ell = 3$  le terme  $x^2y$  est supprimé

pour  $\ell = 4$  le terme  $xy^2$  est supprimé

Remarque: Nous présentons, en annexe V, le sous-programme RAIFL permettant, en particulier, le calcul de la matrice raideur.

### 23.3-Calcul des forces nodales:

Si l'élément est soumis à une pression transversale  $p = p(x,y)$ , le travail des forces extérieures  $\mathcal{L}$  est donc :

$$\mathcal{L} = \int_{e_i} p(x,y) w(x,y) dx dy$$

$$\mathcal{L} = \int_{e_i} p(x,y) [\psi_{li}(M)] dx dy \quad \{A\} \quad (23.19)$$

Appelons  $\{f\}$  les termes de l'intégrale précédente.

$$\{f\} = \int_{e_i} p(x,y) [\psi_{li}(M)]^t dx dy \quad (23.20)$$

alors les forces nodales seront :

$$\{F\} = [C]^{-1,t} \{f\} \quad (23.21)$$

Dans le cas d'une charge  $p$ , du type polynomial

$$p = \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{ab} \xi^i \eta^j \quad (23.22)$$

$$\text{alors } \{f\} = \sum_{ij} \alpha_{ij} \{f_{ij}\} \quad (23.23)$$

$$\text{avec } f_{ij}(k) = S_{i+l, j+m} \quad (23.24)$$

$$k = m + l(l-1)/2$$

Dans le cas d'une force concentrée  $P$ , appliquée au point  $\xi_0, \eta_0$  le vecteur  $\{f\}$  devient

$$\{f\} = \frac{P}{ab} [\psi_{li}(\xi_0, \eta_0)]^t \quad (23.25)$$

$\xi_0$  et  $\eta_0$  étant les coordonnées locales du point d'application de  $P$ .

## 24-ELEMENTS RECTANGULAIRES ET TRIANGULAIRES EN EXTENSION.

### 24.1 Elément rectangulaire.

Nous avons formé une matrice raideur à partir de deux déformées.

-La première, en choisissant des déplacements classiques ([7], [36]) satisfaisant aux critères de convergence.

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 xy \quad (24.1)$$

$$v = A_5 + A_6 x + A_7 y + A_8 xy$$

-La seconde, en tenant compte des équations d'équilibre. Les déformées ne satisfont pas tout à fait aux conditions de convergence. Il n'en demeure pas moins que les résultats du calcul des contraintes est plus satisfaisant. ( GALLAGHER [37] )

$$u = A_1 + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \xi \eta + \bar{u}(\xi, \eta) \quad (24.2)$$

$$v = A_5 + A_6 \xi + A_7 \eta + A_8 \xi \eta + \bar{v}(\xi, \eta)$$

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad ,$$

les fonctions  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  permettant de vérifier les conditions d'équilibre.

$$\bar{u} = A_8 \frac{b}{a} \eta (1-\eta) \quad (24.3)$$

$$\bar{v} = A_4 \frac{a}{b} \xi (1-\xi)$$

avec

$$r = \frac{(1-\nu_x \nu_y) G_{xy} + \nu_x E_y}{2(1-\nu_x \nu_y) G_{xy}} \quad (24.4)$$

La continuité des déplacements entre deux éléments consécutifs est préservée en partie. Le déplacement  $u$  est continu pour  $y$  constant et le déplacement  $v$  pour  $x$  constant.

Les calculs sont faits dans le deuxième cas qui se réduit au premier en posant:  $r=0$  ,

Les noeuds étant lessommets du rectangle (fig.10), il est aisé de calculer la matrice connexion C de cet élément, puis les déformations et contraintes en un point. Les différentes matrices utilisées lors de la détermination de la matrice raideur  $[k_e]$  sont représentées planches 6 et la matrice raideur  $[k_e]$  dépend de dix constantes  $A_i$  telles que, si l'on pose :

$$A_x = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y}$$

$$A_y = \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y}$$

$$A_{xy} = \nu_x A_y = \nu_y A_x$$

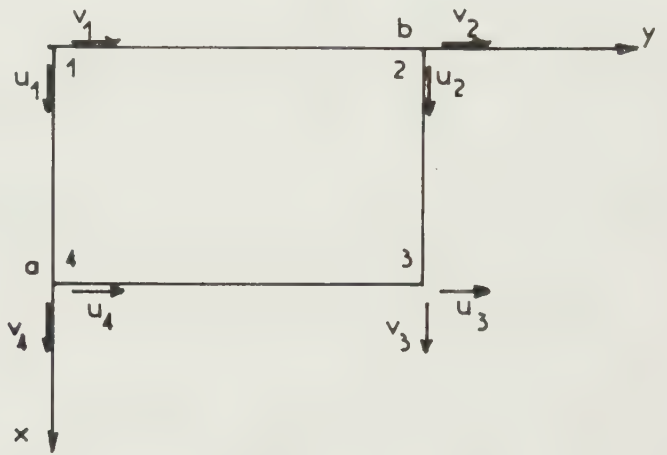


Figure 10: Élément rectangle en extension

$$A_1 = \frac{A_x b}{3 a} + \frac{G_{xy} a}{3 b} (r^2 - r + 1)$$

$$A_2 = \frac{A_{xy} + G_{xy}}{4}$$

$$A_3 = \frac{A_x b}{6 a} - \frac{G_{xy} a}{3 b} (r^2 - r + 1)$$

$$A_4 = \frac{G_{xy} - A_{xy}}{4}$$

$$A_5 = \frac{-A_x b}{6 a} + \frac{G_{xy} a}{6 b} (2r^2 - 2r - 1)$$

$$A_6 = \frac{-A_x b}{3 a} - \frac{G_{xy} a}{6 b} (2r^2 - 2r - 1)$$

$$A_7 = \frac{A_y a}{3 b} + \frac{G_{xy} b}{3 a} (r^2 - r + 1)$$

$$A_8 = \frac{A_y a}{6 b} - \frac{G_{xy} b}{3 a} (r^2 - r + 1)$$

$$A_9 = \frac{-A_y a}{6 b} + \frac{G_{xy} b}{6 a} (2r^2 - 2r - 1)$$

$$A_{10} = \frac{-A_y a}{3 b} - \frac{G_{xy} b}{6 a} (2r^2 - 2r - 1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & \eta(1-\eta)\frac{b}{a}r \\ 0 & 0 & 0 & \xi(1-\xi)\frac{a}{b}r & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \{A_i\}$$

Planche 6a Fonctions  $\psi$  (rectangle en extension)

$$\begin{Bmatrix} a \varepsilon_x \\ b \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{r+\xi(1-2r)}{b} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{r+\eta(1-2r)}{a} \end{bmatrix} \{A_i\}$$

Planche 6b Matrice  $[B]$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Planche 6c Matrice "élasticité"  $[E_e]$

$$\{A_i\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \{d\}$$

Planche 6d Matrice connexion inverse  $[C]^{-1}$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & \\ A_2 & A_7 & & & & & & \\ A_3 & -A_4 & A_1 & & & & & \\ A_4 & A_{10} & -A_2 & A_7 & & & & \\ A_5 & -A_2 & A_6 & -A_4 & A_1 & & & \\ -A_2 & A_9 & A_4 & A_8 & A_2 & A_7 & & \\ A_6 & A_4 & A_5 & A_2 & A_3 & -A_4 & A_1 & \\ -A_4 & A_8 & A_2 & A_9 & A_4 & A_{10} & -A_2 & A_7 \end{bmatrix} \quad \text{symétrique}$$

Planche 6e Matrice raideur d'un rectangle en extension

$$\begin{bmatrix} a\varepsilon_x \\ b\varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{-1} & 0 & -\eta & 0 & \eta & 0 & 1-\eta & 0 \\ 0 & \xi_{-1} & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 & -\xi \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} & -\bar{\alpha} & -\beta & \alpha & \beta & -\alpha & -\bar{\beta} \end{bmatrix} \quad \{d\}$$

$$\alpha = \frac{r + \xi(1-2r)}{b} \quad \beta = \frac{r + \eta(1-2r)}{a} \quad \bar{\alpha} = \alpha - \frac{1}{b} \quad \bar{\beta} = \beta - \frac{1}{a}$$

Planche 6f Matrice [T]

## 24.2 Elément triangulaire: (Figure 11 )

La déformée communément choisie qui vérifie à la fois:

- les conditions de convergence et
- les équations d'équilibre

est:

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 y \quad (24.6)$$

$$v = A_4 + A_5 x + A_6 y$$

Les contraintes sont constantes dans un élément.

$$\epsilon_x = A_2 \quad (24.7)$$

$$\epsilon_y = A_6$$

$$\gamma_{xy} = A_3 + A_5$$

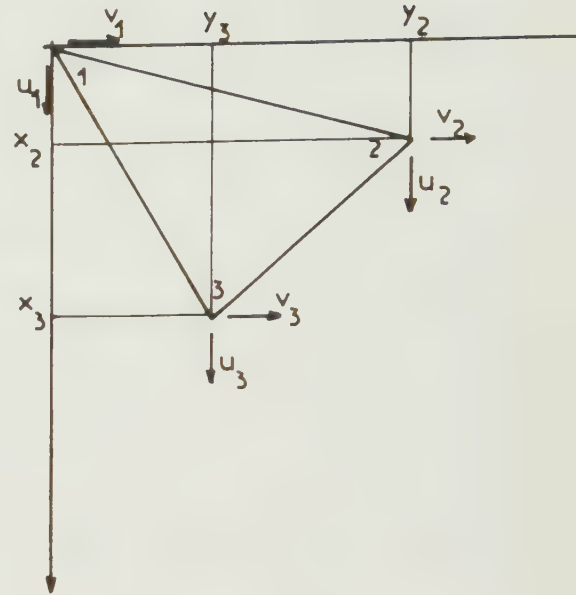


Figure 11: Elément triangle en extension

La matrice connexion est inversible puisque son déterminant est égal à l'aire du triangle qui ne peut être nulle.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 - y_2 & 0 & -y_3 & 0 & y_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & 0 & x_3 & 0 & -x_2 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 - y_2 & 0 & -y_3 & 0 & y_2 \\ 0 & x_2 - x_3 & 0 & x_3 & 0 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$x_i, y_i$  Coordonnées du point nodal  $i$

$$S = x_3 y_2 - x_2 y_3 \quad (24.8)$$

Par conséquent, la matrice T s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 & 0 & -y_3 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & 0 & x_3 & 0 & -x_2 \\ x_2 - x_3 & y_3 - y_2 & x_3 & -y_3 & -x_2 & y_2 \end{bmatrix} |d|$$

$$\begin{bmatrix} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^t \quad (24.9)$$

D'où la matrice raideur :

$$\begin{bmatrix} K_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{symétrique} & & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \begin{bmatrix} A_x y_{32} y_{32} + G_{xy} x_{32} x_{32}, & (A_{xy} + G_{xy}) x_{32} y_{23} \\ \text{sym.} & A_y x_{32} x_{32} + G_{xy} y_{32} y_{32} \end{bmatrix} \\
K_{12} &= \begin{bmatrix} A_x y_3 y_{23} + G_{xy} x_3 x_{23}, & A_{xy} x_3 y_{32} + G_{xy} y_3 x_{32} \\ G_{xy} x_3 y_{32} + A_{xy} y_3 x_{32}, & G_{xy} y_3 y_{23} + A_y x_3 x_{23} \end{bmatrix} \\
K_{13} &= \begin{bmatrix} A_x y_2 y_{32} + G_{xy} x_2 x_{32}, & A_{xy} x_2 y_{23} + G_{xy} y_2 x_{23} \\ G_{xy} x_2 y_{23} + A_{xy} y_2 x_{23}, & G_{xy} y_2 y_{32} + A_y x_2 x_{32} \end{bmatrix} \\
K_{22} &= \begin{bmatrix} A_x y_3 y_3 + G_{xy} x_3 x_3, & -(A_{xy} + G_{xy}) x_3 y_3 \\ \text{sym.} & A_y x_3 x_3 + G_{xy} y_3 y_3 \end{bmatrix} \\
K_{23} &= \begin{bmatrix} -A_x y_2 y_3 - G_{xy} x_2 x_3 & G_{xy} x_3 y_2 + A_{xy} x_2 y_3 \\ G_{xy} x_2 y_3 + A_{xy} x_3 y_2 & -G_{xy} y_2 y_3 - A_y x_2 x_3 \end{bmatrix} \\
K_{33} &= \begin{bmatrix} A_x y_2 y_2 + G_{xy} x_2 x_2 & -(A_{xy} + G_{xy}) x_2 y_2 \\ \text{sym} & A_y x_2 x_2 + G_{xy} y_2 y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Toutes ces valeurs sont à diviser par 25

avec

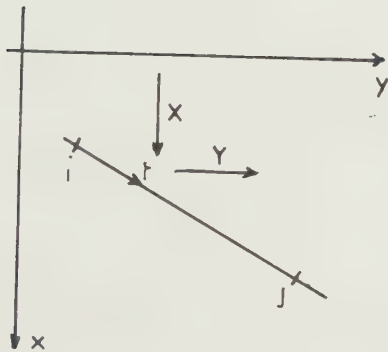
$$\begin{aligned}
x_{32} &= x_3 - x_2 \\
y_{32} &= y_3 - y_2 \\
y_{23} &= y_2 - y_3 \\
x_{23} &= x_2 - x_3 \\
S &= x_3 y_2 - x_2 y_3
\end{aligned}$$

### 24.3-Calcul des forces nodales:

Considérons un côté de l'élément compris entre les noeuds i et j.  
Le long de ce bord, les variables x et y peuvent s'exprimer en fonction de t, abscisse le long de i.j.

$$\begin{aligned}x &= x_i + x_{ji} t \\y &= y_i + y_{ji} t\end{aligned}\quad (24.10)$$

$$\text{avec } x_{ji} = x_j - x_i \text{ et } y_{ji} = y_j - y_i$$



Si cette frontière est soumise à des forces X et Y par unité de longueur et orientées suivant les axes x et y telles que la force s'exerçant sur le côté soit  $X dy + Y dx$ , alors le travail de ces forces s'écrit :

Figure 12

$$\{F\}^t \{d_i\} = \{F\}^t [C] \{A\} = \int_i^j (X u dy + Y v dx) \quad (24.11)$$

$$x, y \in ij$$

X, Y, u, v étant développées sous forme polynomiale une telle intégrale comporte des termes du type :

$$I_{pq} = \int_i^j x^p y^q dt$$

soit:

$$I_{pq} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q \frac{p!}{m!} \frac{q!}{n!} \frac{(x_i)^m (x_{ji})^{p-m} (y_i)^n (y_{ji})^{q-n}}{(p-m + q-n + 1)!} \quad (24.12)$$

Puisque u et x sont liées aux constantes  $A_i$  l'intégrale (24.11) devient :

$$\{F\}^t \{d\} = \{f\}^t \{A\} \quad (24.13)$$

$$\text{Par suite : } \{F\} = [C]^{-1,t} \{f\} \quad (24.14)$$



### Chapitre III:

#### APPLICATION A DES PLAQUES ET DES COQUES.

---

##### 31-Comparaison avec des résultats exacts de plaques:

31.1 *Plaque orthotrope, en appui simple, sans effet de cisaillement.*

31.2 *Plaque appuyée-encastree, avec effet de cisaillement.*

31.3 *Plaque infinie percée d'un trou circulaire, en traction uniforme.*

##### 32-Comparaison avec des résultats exacts de coques:

32.1 *Calcul des coques axisymétriques.*

32.2 *Coque cylindrique, orthotrope, sous pression.*

##### 33-Comparaison avec des résultats expérimentaux:

33.1 *Mesure des constantes élastiques.*

33.2 *Flexion d'une plaque encastree.*

33.3 *Coque sous pression.*



Nous avons testé les différentes matrices, déterminées au chapitre précédent, par rapport à des solutions exactes de plaque et coque, puis par rapport à des résultats expérimentaux. Ces matrices tiennent compte des effets de cisaillement dont nous avons montré l'importance dans le chapitre II, §23.1.

### 31-COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXACTS DE PLAQUES:

En flexion, nous avons choisi deux cas de plaques carrées reposant sur appuis simples, l'un sans effet de cisaillement, l'autre avec effet de cisaillement et chargées uniformément. Dans ce dernier cas, les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , caractérisant les variations de la flèche et du moment sont de l'ordre de:

$$\alpha = 70 \quad \text{( flèche maximum au centre de la plaque )}$$

$$\beta = 30 \quad \text{( moment au centre de la plaque )}$$

Dans le cas de contraintes planes, nous avons comparé les résultats sur une plaque infinie percée d'un trou circulaire, soumise à une traction uniforme.

#### 31.1 - Plaque orthotrope en appui simple, sans effet de cisaillement:

Nous nous sommes intéressés aux déplacements et aux efforts auxquels était soumise une plaque carrée, mince, anisotrope reposant sur des appuis simples invariables sur tout son contour. (Figure 13a.)

La flèche, ainsi que toutes les autres grandeurs  $\phi, \theta, M_x, M_y, M_{xy}$ , produits par une charge uniforme  $q$  sont obtenues analytiquement par la méthode de LEVY (Annexe II.) Ces résultats sont représentés sur les figures 13 par les courbes et les résultats approchés par des symboles.

Les différentes valeurs ont été divisées par les quantités suivantes, correspondant à une plaque carrée isotrope en appui simple (TIMOSHENKO [38])

$$w_o = 0,00406 \frac{q a^4}{\sqrt{D_x D_y}}$$

$$M_o = 0,0479 q a^2$$

$$R = 0,0325 q a^2$$

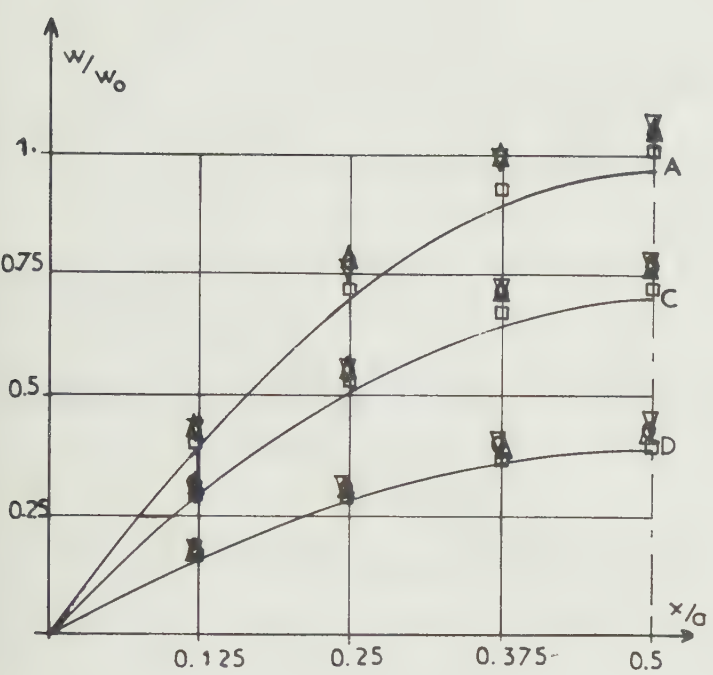
$$\theta_o = \phi_o = \pi \frac{w_o}{a}$$

$$Q_o = 0,0338 q a$$

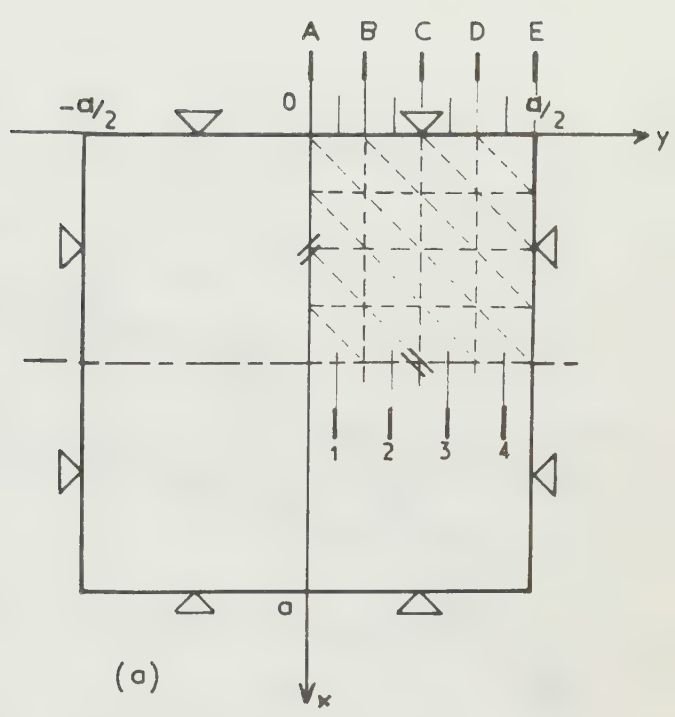
Les déformations de la plaque étant symétriques, seul un quart de plaque a été étudié par la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus en utilisant des éléments rectangulaires sont plus rapprochés des valeurs exactes que ceux obtenus à l'aide d'éléments triangulaires groupés deux à deux. Dans ce dernier cas, les triangles 1, 2, 3, 4 ont tous une matrice connexion non singulière. (§ 23.2 )

L'élément triangle 2 (suppression du terme en  $xy$ ) donne des résultats peu probants et sera abandonné par la suite (différence de 25 % sur la flèche maximum).

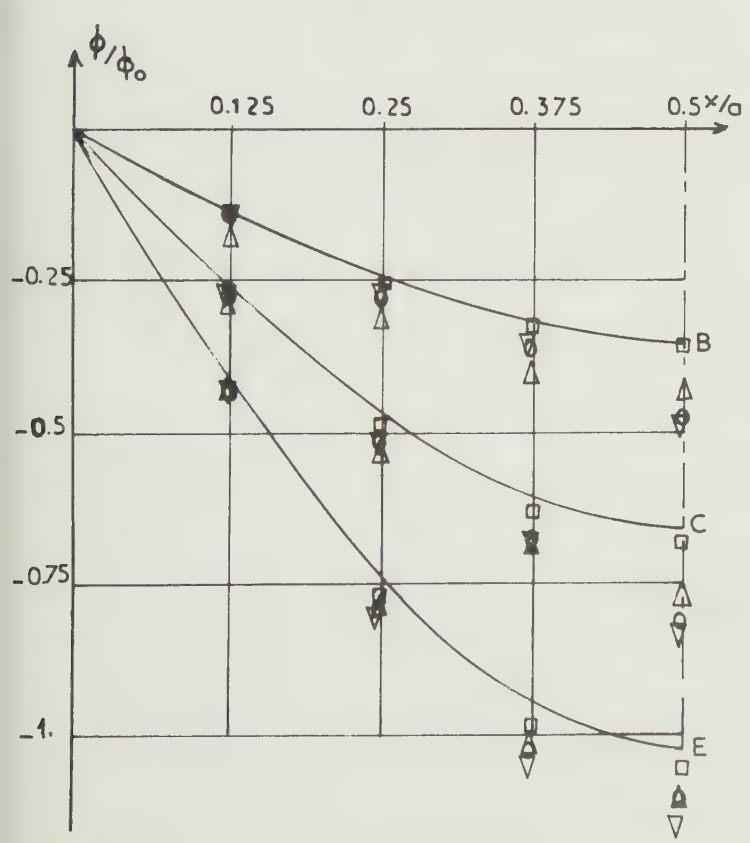
Les éléments triangulaires 1, 3, 4 permettent d'obtenir à peu près les mêmes valeurs.



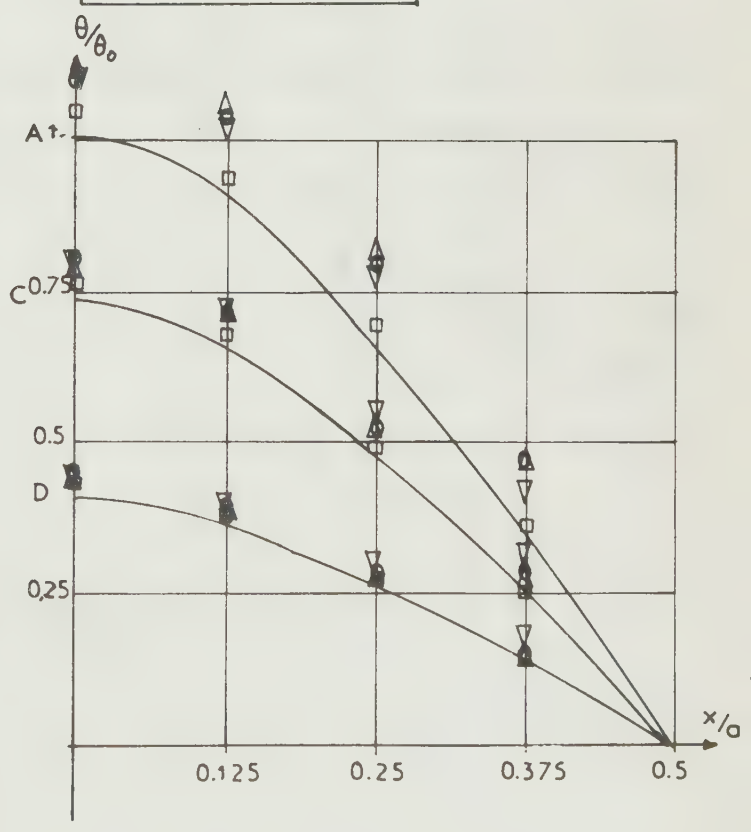
(b) Déplacements transversaux



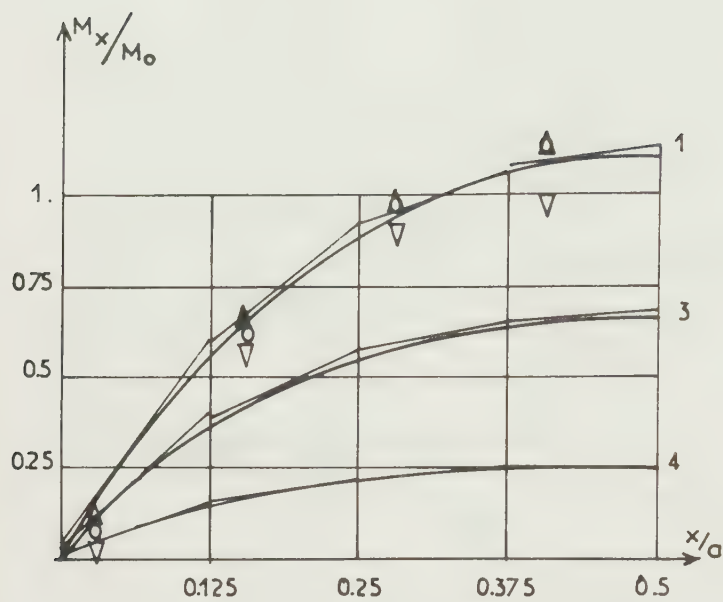
- Rectangle
- Triangle 1
- △ Triangle 3
- ▽ Triangle 4



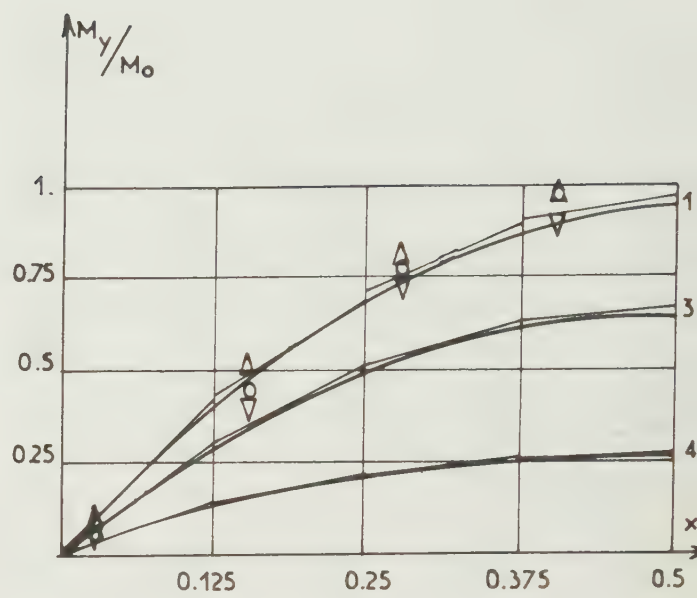
(c) Rotations  $\phi$



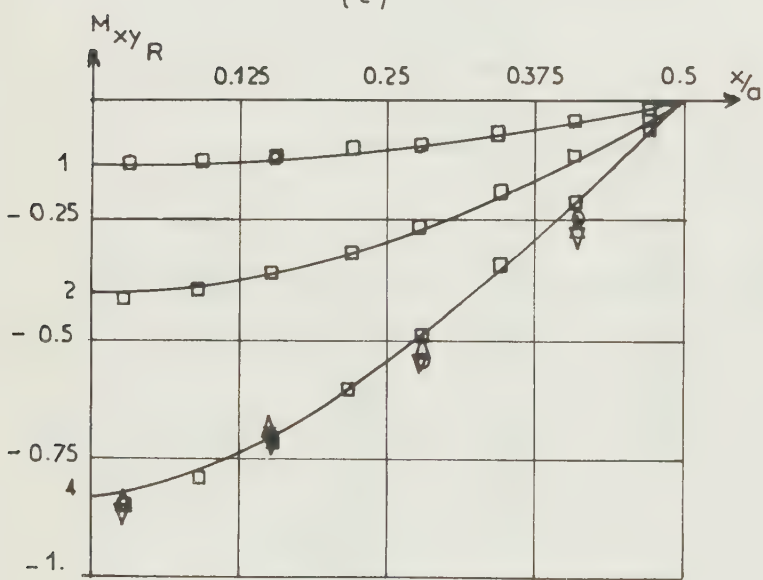
(d) Rotations  $\theta$



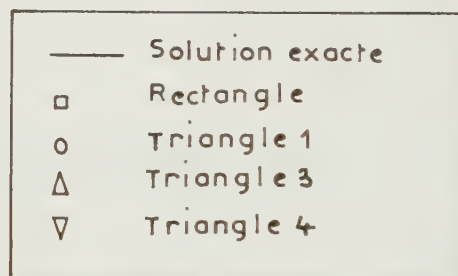
(e)



(f)



(g)

Figures 13 (suite)

### 31.2 - Plaque appuyée-encastree avec effet de cisaillement:

La plaque est carrée, appuyée sur deux cotés opposés, encastree le long des deux autres bords, et soumise à une pression transversale  $q$  uniforme,

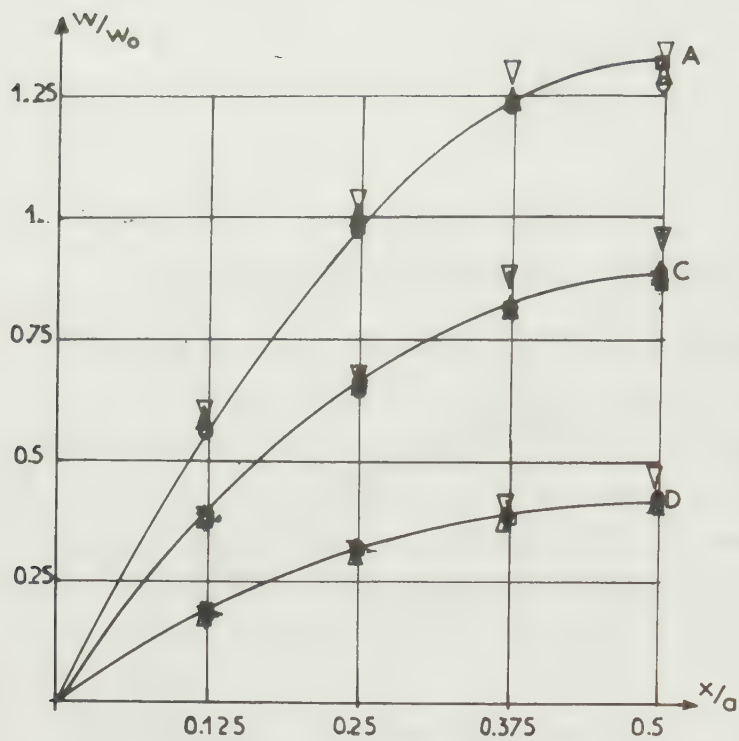
Le choix de cette condition d'encastrement a été motivé par le fait que les effets de cisaillement sont plus importants dans ce cas. La solution obtenue à partir de la méthode de LEVY (Annexe II) rend compte de l'effet de cisaillement. Afin que celui-ci ne soit pas négligeable, nous avons choisi arbitrairement un coefficient  $k$  ( chapitre II) relativement important. ( $k = 10^{-2}$  ).

Les résultats sont représentés de la même façon que précédemment (§ 31.1) avec les mêmes normes.

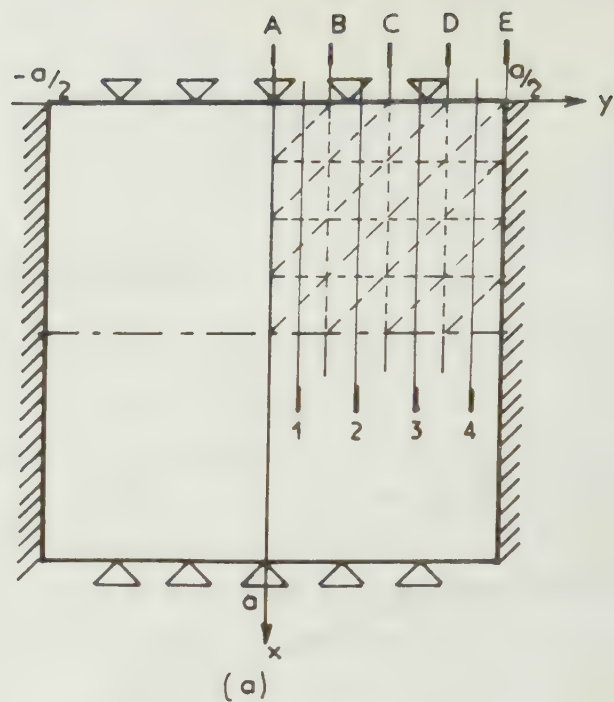
Les triangles 3,4 introduisant des valeurs très différentes pour les déplacements (figure 14) et les efforts, par conséquent, ne seront plus utilisés dans le cas de fort cisaillement.

Nous remarquerons d'autre part une légère dissymétrie entre deux quarts de plaque dans le cas d'éléments triangulaires.

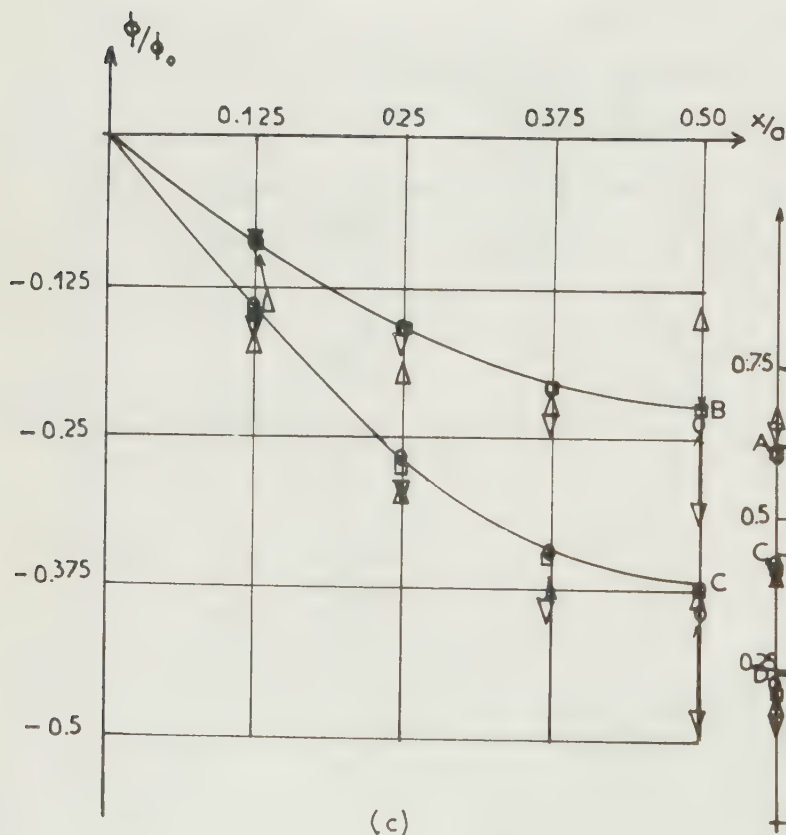
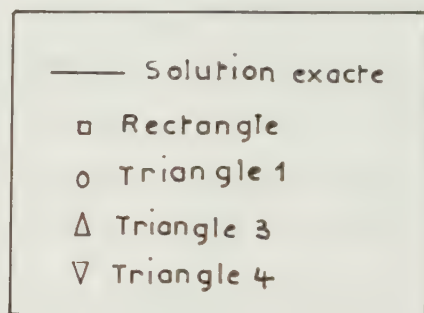
Cette différence également observée par POPPLEWELL et MAC-DONALD [39] dans le cas isotrope est due à la non-symétrie de l'élément quadrangle utilisé.



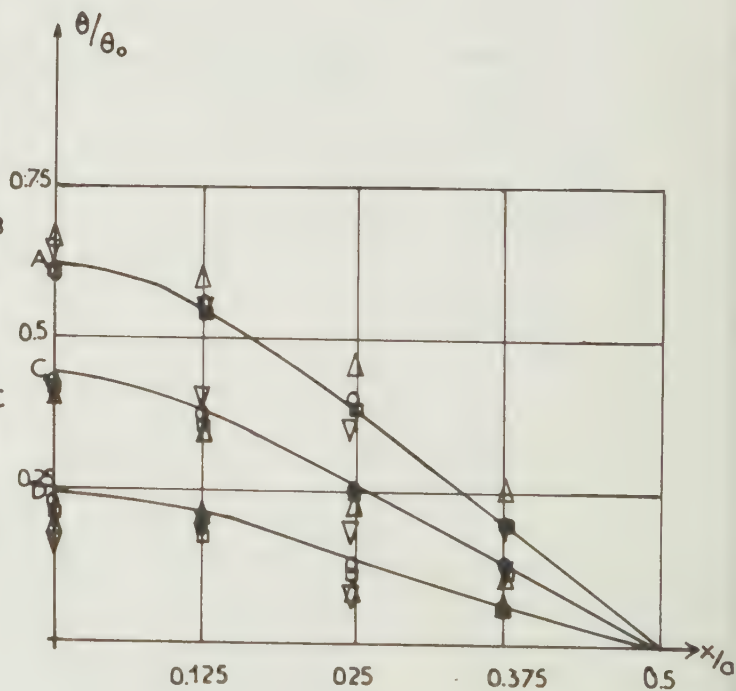
(b)



(a)

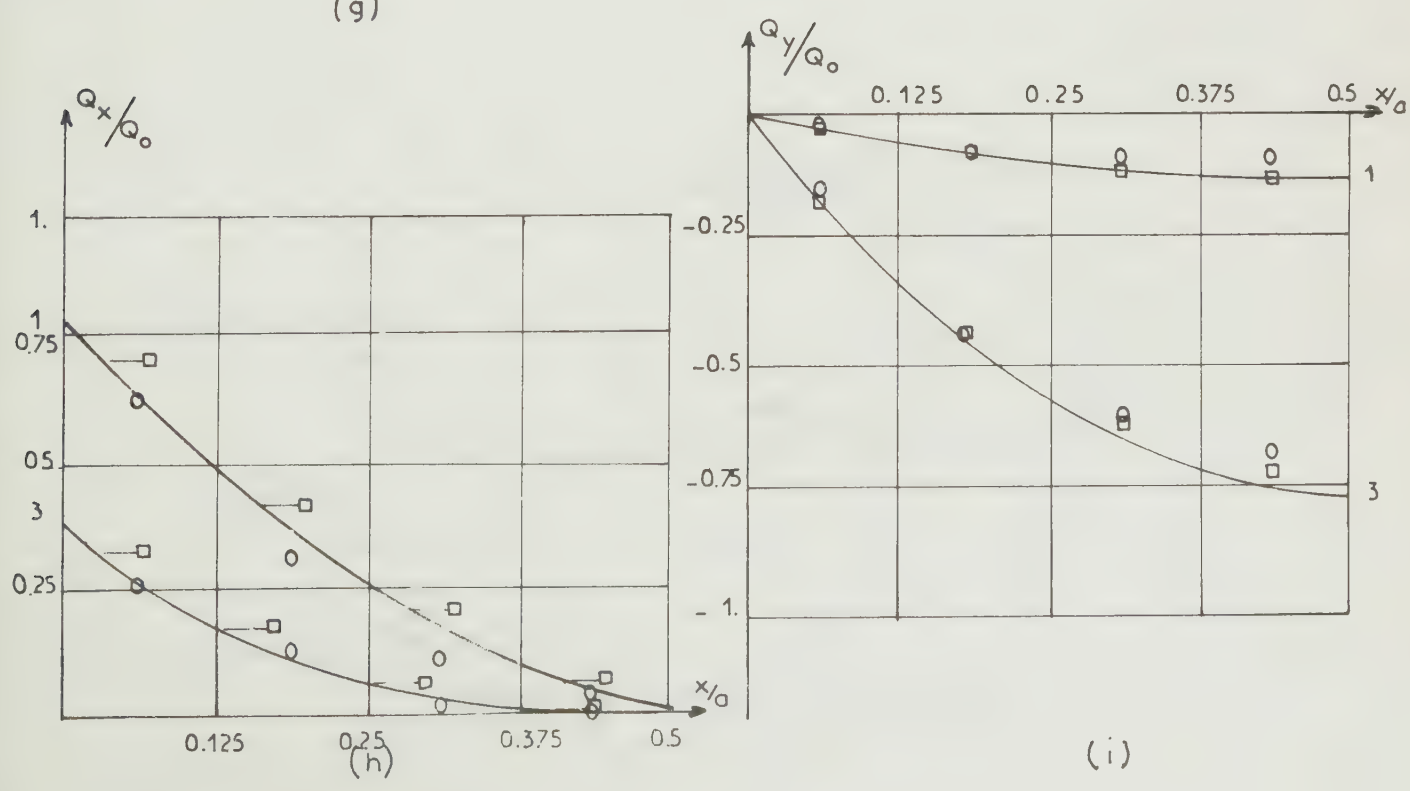
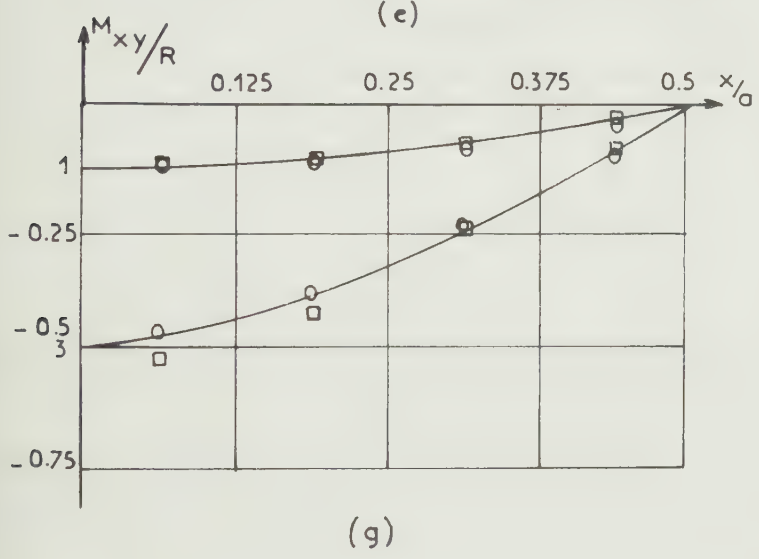
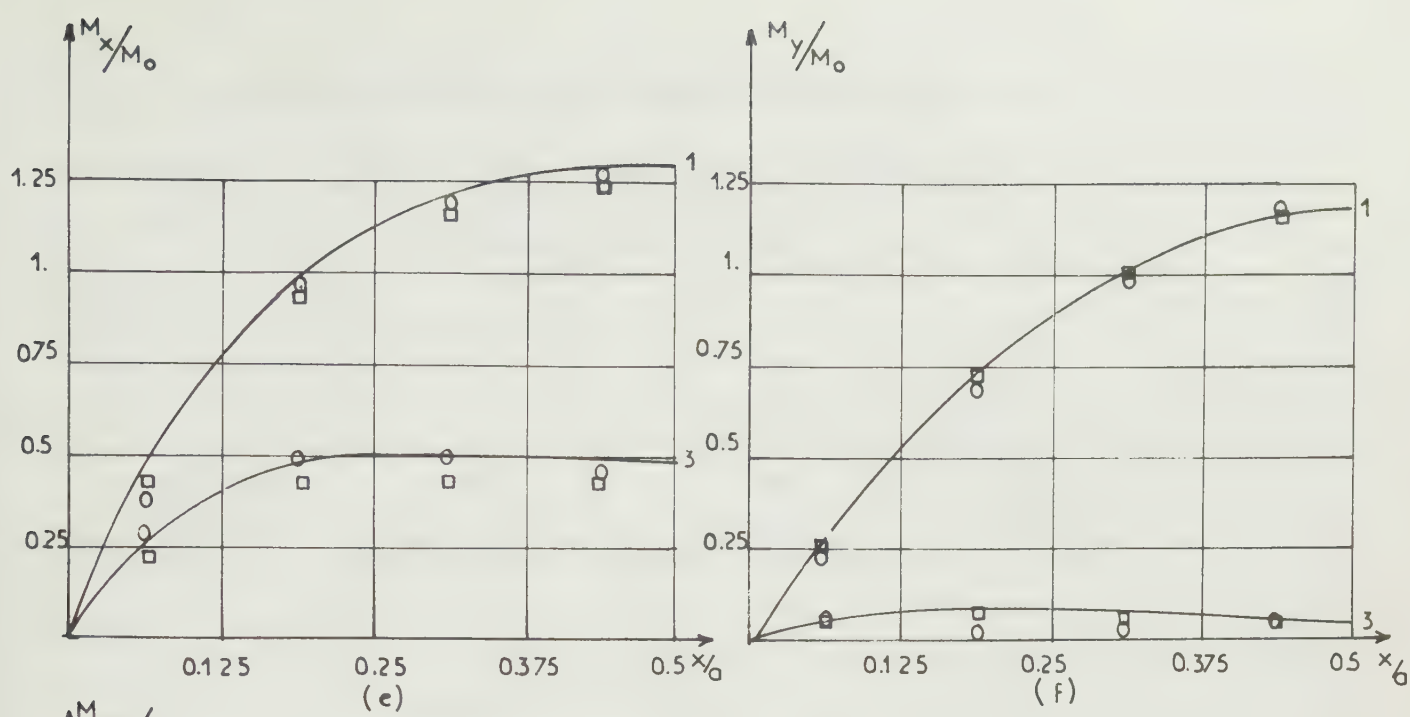


(c)



(d)

Figures 14 - Déplacements



31.3 - Plaque infinie percée d'un trou circulaire, en traction uniforme.

Les déplacements et contraintes sont déterminées de façon exacte en Annexe III. Seul un quart de plaque, limité par le cercle de rayon  $7a$ , a été étudié par des éléments triangulaires.

La comparaison se fait sur la contrainte maximum au bord du trou.

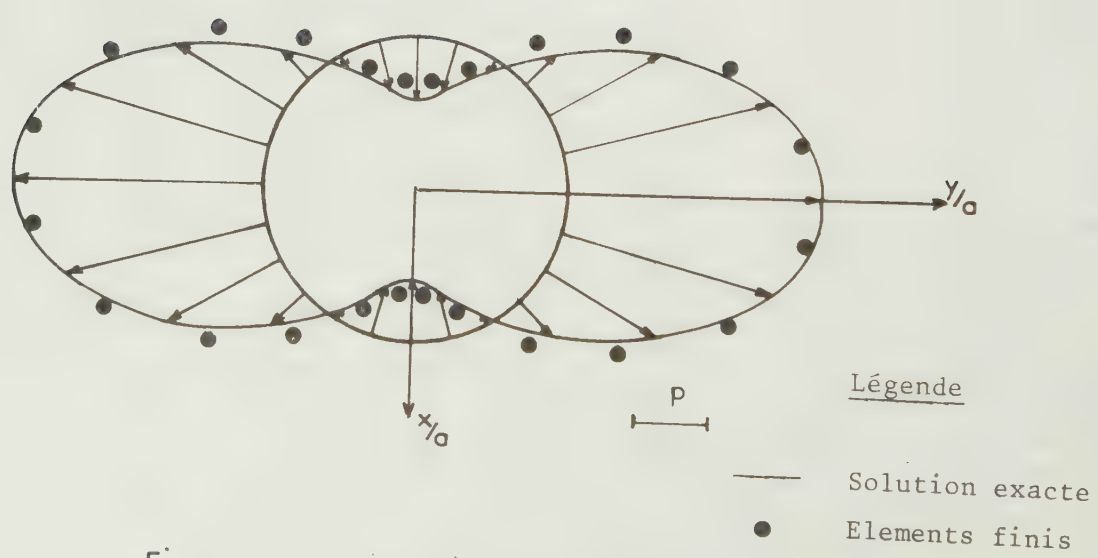
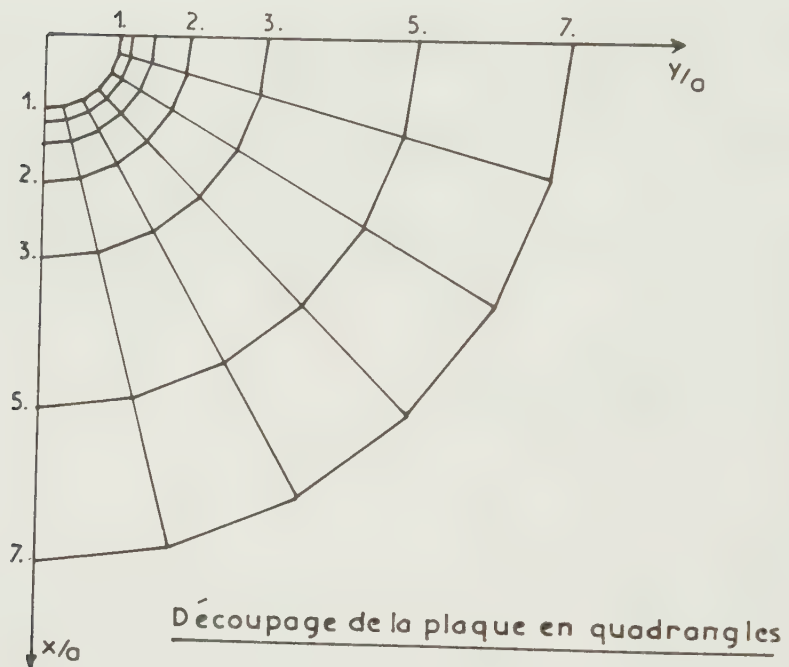


Figure 15: Contraintes maximales à l'ouverture.

### 32-COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXACTS DE COQUES:

Nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode des éléments finis à ceux obtenus analytiquement (Annexe IV) dans le cas d'une coque cylindrique, orthotrope, encastrée-libre, soumise à une pression intérieure constante.

Avant de donner les résultats, il nous apparaît important d'explicitier totalement le processus de calcul que nous avons mis au point et qui nous paraît bien adapté au calcul des coques axisymétriques, chargées symétriquement.

#### 32.1 Calcul des coques axisymétriques:

Afin de tenir compte de la symétrie, nous avons précisé l'aspect mécanique du processus, de manière à réduire la dimension des matrices.

Une telle coque sera découpée en bandes identiques.

Considérons une bande limitée par les frontières  $F_k$  et  $F_{k+1}$  (Figure 17)

Elle est caractérisée par la matrice raideur  $|K|$ :

$$\begin{pmatrix} f_k^{\circ} \\ f_{k+1}^{+} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21}^t \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^{\circ} \\ d_{k+1}^{+} \end{pmatrix} \quad (33.1)$$

$f_i$  représentant les forces intérieures sur la frontière  $F_i$  avec le symbole  $+$  pour la droite et le symbole  $\circ$  pour la gauche.

$d_i$  représentant les déplacements correspondants.

Or, par raison de symétrie, les déplacements de toutes les frontières  $F_k$  sont égaux.

$$\{d_k^{\circ}\} = \{d_k^{+}\} = \{d_{k+1}^{+}\} = \{d_{k+1}^{\circ}\} = \{q\} \quad \text{quel que soit } k \quad (33.2)$$

La relation (33.1) devient donc:

$$\begin{pmatrix} f_k^{\circ} \\ f_{k+1}^{+} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} + K_{21}^t \\ K_{21} + K_{22} \end{bmatrix} \{q\} \quad (33.3)$$

Pour la bande précédente, il existe une relation identique:

$$\begin{pmatrix} f_{k-1}^{\circ} \\ f_k^{+} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} + K_{21}^t \\ K_{22} + K_{22} \end{bmatrix} \{q\} \quad (33.4)$$

Ce qui introduit:

$$\begin{aligned} \{f_k^\circ\} &= \{f_{k+1}^\circ\} \\ \{f_k^+\} &= \{f_{k+1}^+\} \end{aligned} \quad (33.5)$$

Les forces extérieures appliquées le long de la génératrice  $F_k$  sont:

$$\{Q\} = \{f_k^\circ\} + \{f_k^+\} \quad (33.6)$$

De (33.3,5,6) , nous déduisons:

$$\{Q\} = \left[ K_{11} + K_{21}^t + K_{21} + K_{22} \right] \{q\} \quad (33.7)$$

Considérons une sous-bande formée des éléments  $i-1, i$  et  $i+1$  ( Figure 17 ).

La matrice raideur de l'élément  $i$  est:

$$\begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{21}^{t,i} & k_{31}^{t,i} & k_{41}^{t,i} \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{32}^{t,i} & k_{42}^{t,i} \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i & k_{43}^{t,i} \\ k_{41}^i & k_{42}^i & k_{43}^i & k_{44}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^i \\ d_2^i \\ d_3^i \\ d_4^i \end{bmatrix} \quad (33.8)$$

Or les déplacements sont égaux deux à deux par raison de symétrie,

$$\{d_1^i\} = \{d_2^i\} \quad \text{et} \quad \{d_3^i\} = \{d_4^i\}$$

La matrice raideur (33.8) s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i + k_{21}^{t,i} & k_{31}^{t,i} + k_{41}^{t,i} \\ k_{22}^i + k_{21}^i & k_{32}^{t,i} + k_{42}^{t,i} \\ k_{31}^i + k_{32}^i & k_{33}^i + k_{43}^{t,i} \\ k_{41}^i + k_{42}^i & k_{43}^i + k_{44}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^i \\ d_4^i \end{bmatrix} \quad (33.9)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \{f_i^{\circ}\} &= \{f_4^{i-1}\} + \{f_1^i\} \\
 \{f_i^+\} &= \{f_3^{i-1}\} + \{f_2^i\} \\
 \{Q_i\} &= \{f_i^{\circ}\} + \{f_i^+\}
 \end{aligned}
 \tag{33.10}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 [b_i] &= [k_{41}^i + k_{42}^i + k_{31}^i + k_{32}^i] \\
 [a_i] &= [k_{11}^i + k_{21}^{t,i} + k_{21}^i + k_{22}^i] \\
 [c_i] &= [k_{33}^i + k_{43}^i + k_{44}^i + k_{43}^{t,i}]
 \end{aligned}$$

D'autre part, posons :

$$\begin{aligned}
 \{d_4^i\} &= \{q_{i+1}\} \\
 \{d_1^i\} &= \{q_i\}
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\{Q_i\} = [b_{i-1}] \{q_{i-1}\} + [a_i + c_{i-1}] \{q_i\} + [b_i^t] \{q_{i+1}\}$$

Pour la première force  $\{Q_1\}$

$$\{Q_1\} = [a_1] \{q_1\} + [b_1^t] \{q_2\}$$

Et pour la dernière force  $\{Q_{m+1}\}$

$$\{Q_{m+1}\} = [b_m] \{q_m\} + [c_m] \{q_{m+1}\}$$

Nous avons alors le choix entre deux méthodes :

- On écrit toutes les relations du type précédent et on résout le système :

$$\{Q\} = [K] \{q\}$$

Le processus a permis de diviser par deux le nombre de degrés de liberté du système ainsi que la largeur de bande.

- On peut aussi procéder par récurrence :

Le premier point a un vecteur déplacement  $\{q_1\}$  tel que

$$\{\hat{q}_1\} = \begin{bmatrix} \beta_1 \end{bmatrix} \{d_1\} \quad ;$$

$\{d_1\}$  représentant les déplacements non nuls.

Les forces correspondantes  $\{F_1\}$  sont telles que:

$$\{F_1\} = \begin{bmatrix} \beta_1^t \end{bmatrix} \{Q_1\}$$

Soit :

$$\{F_1\} = \begin{bmatrix} \beta_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \end{bmatrix} \{d_1\} + \begin{bmatrix} \beta_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix} \{q_2\}$$

Ce qui entraîne :

$$\{q_1\} = \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} \{q_2\} + \{\bar{q}_1\}$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^t & a_1 & \beta_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix} \\ \{\bar{q}_1\} &= \begin{bmatrix} \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^t & a_1 & \beta_1 \end{bmatrix}^{-1} \{F_1\} \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait pour le déplacement  $\{q_k\}$  une relation:

$$\{q_k\} = \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix} \{q_{k+1}\} + \{\bar{q}_k\} \quad 2 < k < m$$

alors,

$$\begin{aligned} \{F_{k+1}\} &= \begin{bmatrix} \beta_{k+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k & x_k + a_{k+1} + c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{k+1} \end{bmatrix} \{d_{k+1}\} + \dots \\ &\dots \begin{bmatrix} \beta_{k+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \end{bmatrix} \{\bar{q}_k\} + \begin{bmatrix} \beta_{k+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k+1} \end{bmatrix} \{q_{k+2}\} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \beta_{k+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+1} + c_k + b_k x_k \end{bmatrix} \beta_{k+1}^{-1} \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_{k+1} & E & \beta_{k+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k+1}^t \end{bmatrix} \\ \{\bar{q}_{k+1}\} &= \begin{bmatrix} \beta_{k+1} & E & \beta_{k+1}^t & b_k \end{bmatrix} \{q_k\} - \{F_k\} \end{aligned}$$

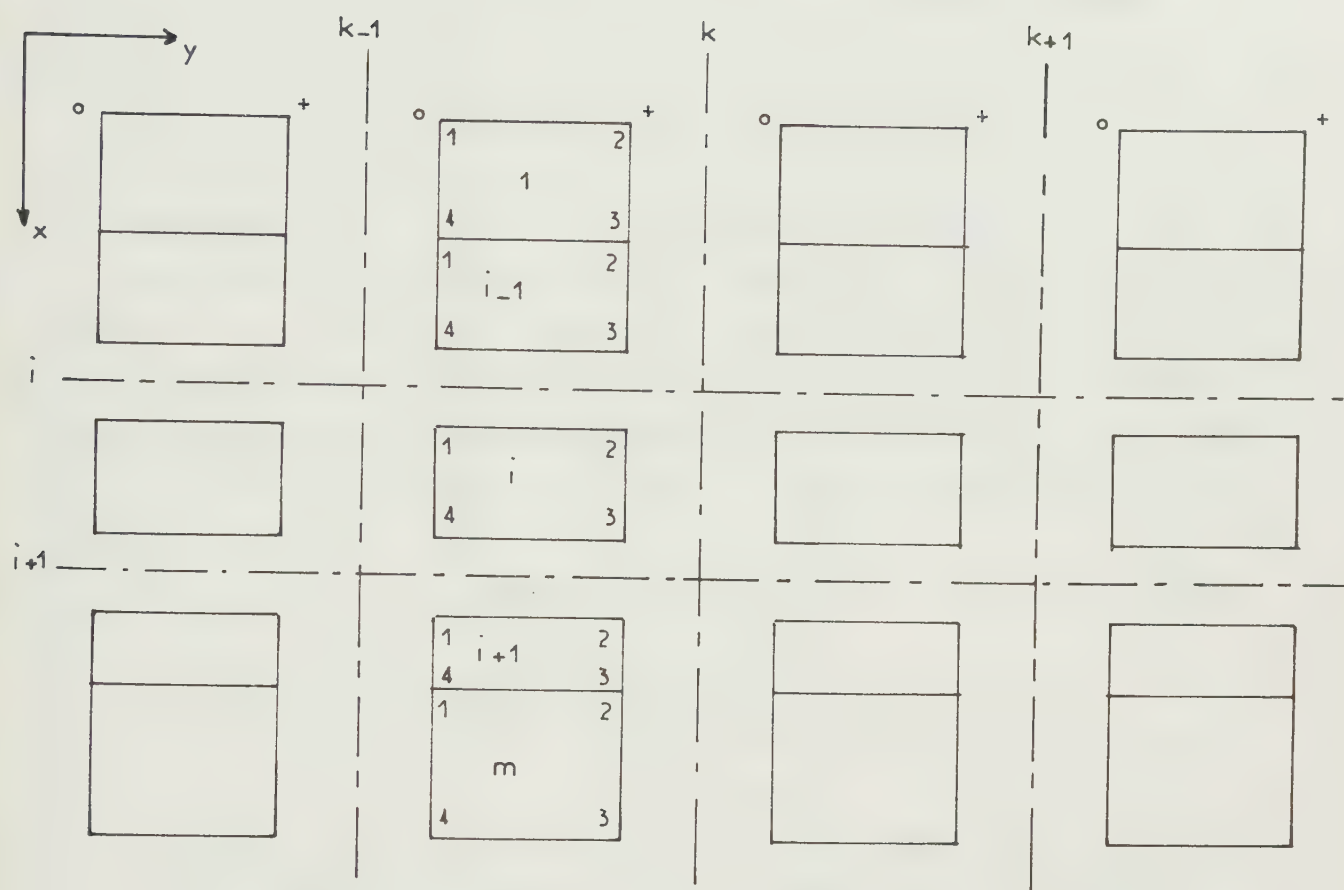
Nous établissons ainsi une récurrence jusqu'à  $k=m$

$$\{q_m\} = \begin{bmatrix} x_m \end{bmatrix} \{q_{m+1}\} + \{\bar{q}_m\}$$

D'où:

$$\{F_{m+1}\} - \begin{bmatrix} \beta_{m+1}^t & b_m \end{bmatrix} \{\bar{q}_m\} = \begin{bmatrix} \beta_{m+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_m + b_m x_m \end{bmatrix} \beta_{m+1}^{-1} \{d_{m+1}\}$$

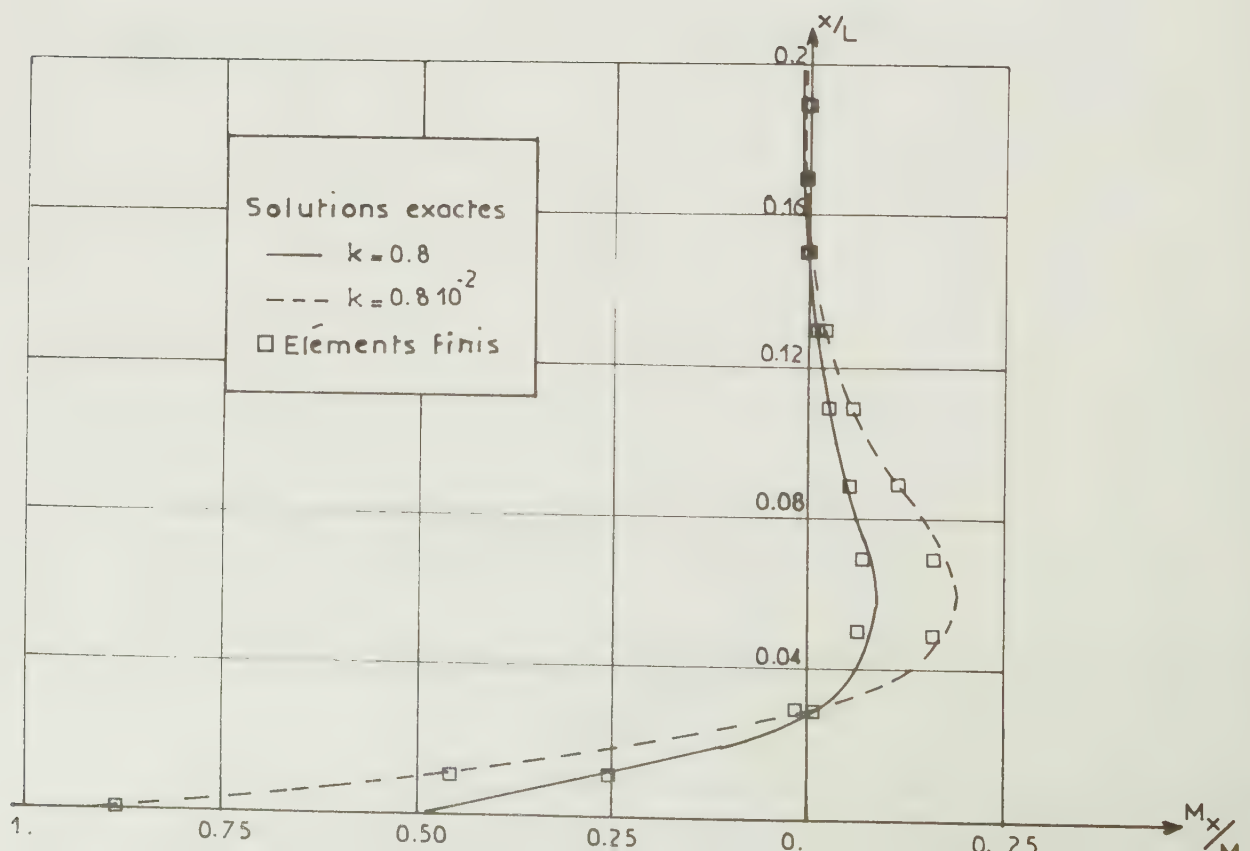
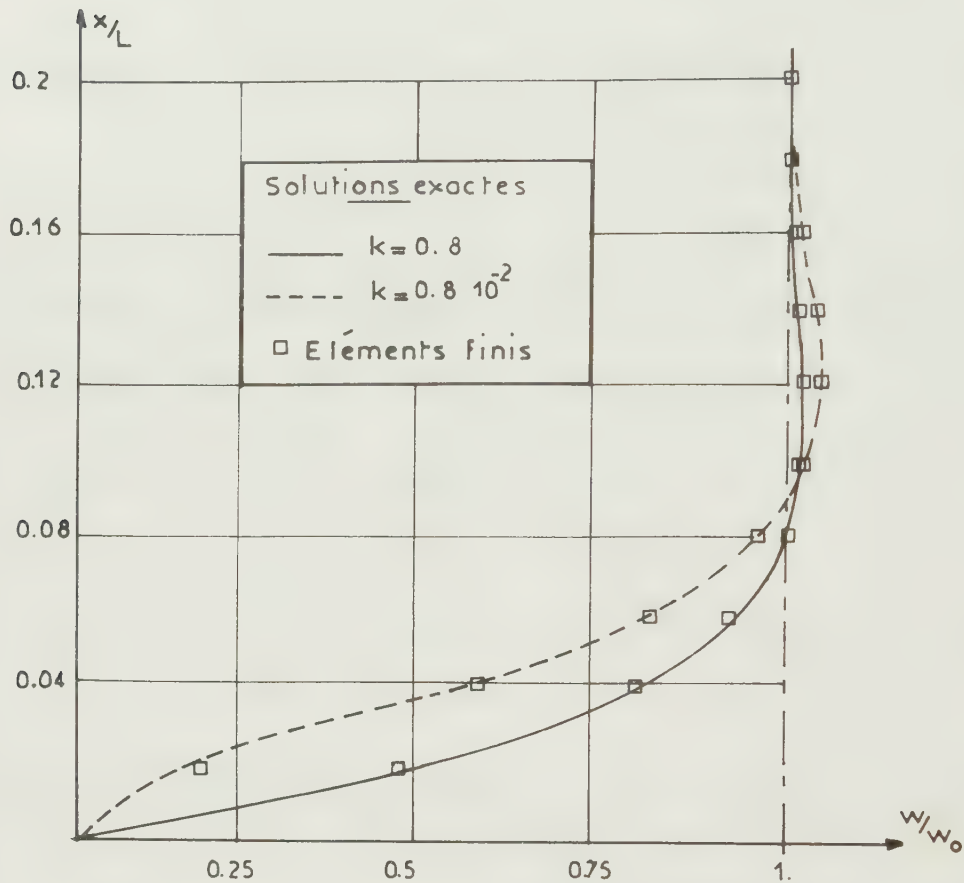
De cette dernière relation nous tirons immédiatement  $\{d_{m+1}\}$  et en opérant en sens inverse, nous déterminons tous les déplacements.



Développement du découpage de la coque

### 32.2 Coque cylindrique orthotrope sous pression:

Les résultats figurent sur les courbes ci-après. Les dimensions, paramètres élastiques et conditions limites sont celles indiquées dans le chapitre II, §231.



### 33-COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX:

La comparaison entre les résultats expérimentaux et approchés nécessite de connaître les grandeurs géométriques et les constantes élastiques du matériau avec une précision suffisante afin que les résultats obtenus de manière approchée ne s'écartent pas des valeurs mesurées pour des raisons extérieures à la méthode. Les plaques NORSIAL utilisées pour ces différentes expériences sont étudiées comme des plaques orthotropes et leurs caractéristiques sont déterminées globalement.

Nous indiquons, tout d'abord, les procédés de mesure de ces constantes.

Ensuite, nous comparons des résultats expérimentaux relatifs à une plaque et à une coque à ceux déduits de la méthode des éléments finis, dans laquelle nous utilisons les valeurs des constantes précédemment obtenues.

#### 33.1 Mesure des constantes élastiques.

Il faut donc connaître les différents coefficients précisés en annexe I :

$D_x, D_y, \mu_x, \mu_y, D_{xy}, E_x, E_y, \nu_x, \nu_y, G_{xy}, D_{qx}$  et  $D_{qy}$ .

- Rigidité en flexion et coefficients de Poisson associés:

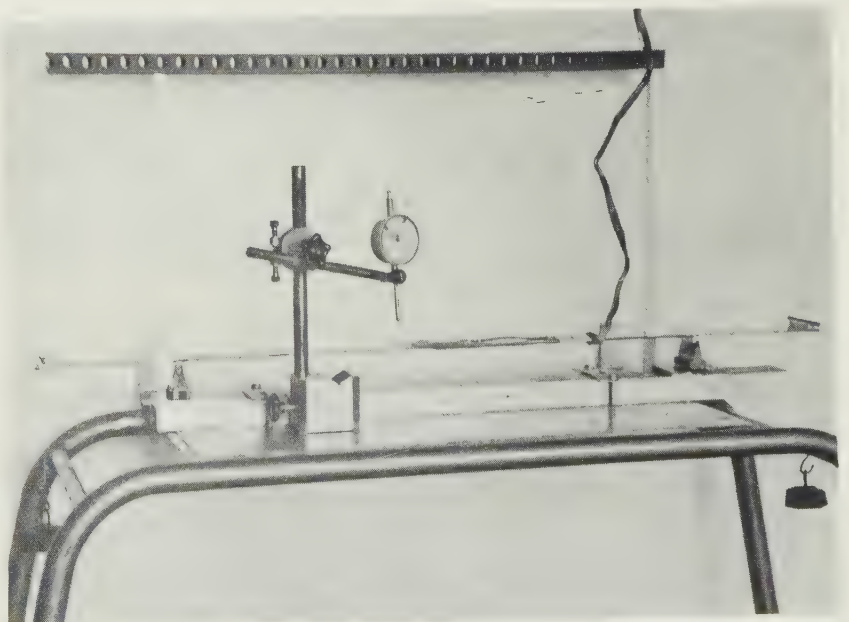
$D_x, D_y, \mu_x, \mu_y$ .

L'expérience consiste à charger une poutre simplement appuyée, par un moment de flexion constant, obtenu par application de forces extérieures aux appuis.

La poutre doit présenter le critère d'unidimensionalité, c'est à dire

$$\frac{l}{d} < 0,1$$

mais la largeur  $d$  doit être suffisamment importante pour que l'on puisse mesurer la courbure transversale. Dans le cas de poutres sandwich la largeur doit être au moins d'une dizaine de pas, afin que le coefficient mesuré ait un caractère



Les variations de courbure sont évaluées à partir de jauges de contraintes situées de part et d'autre de la poutre.

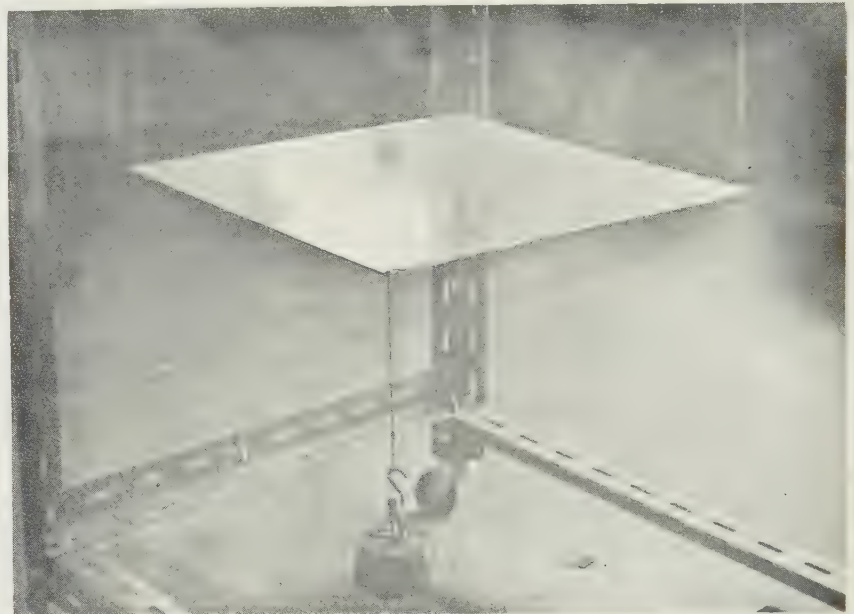
Le diagramme charge-déformation est linéaire et les résultats sont peu dispersés pour différentes éprouvettes. Le coefficient de Poisson  $\mu_y$ , plus délicat à mesurer dans le cas où  $D_x > D_y$ , a été ajusté de façon à vérifier la relation de réciprocité

$$\mu_x D_y = \mu_y D_x$$

#### Rigidité en torsion : $D_{xy}$

Les réactions de coin étant  $2 M_{xy}$ , il suffit de charger une plaque aux quatre coins par des forces  $P$  et  $-P$  alternativement, pour obtenir un moment de torsion constant dans la plaque.

Nous avons préféré déterminer les déformations au centre de la plaque, au lieu de mesurer la flèche, par suite du manque de stabilité du montage.



#### Rigidité en extension et coefficients de Poisson associés:

$$E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$$

Les essais de traction ont été effectués sur les mêmes éprouvettes que pour les mesures précédentes.

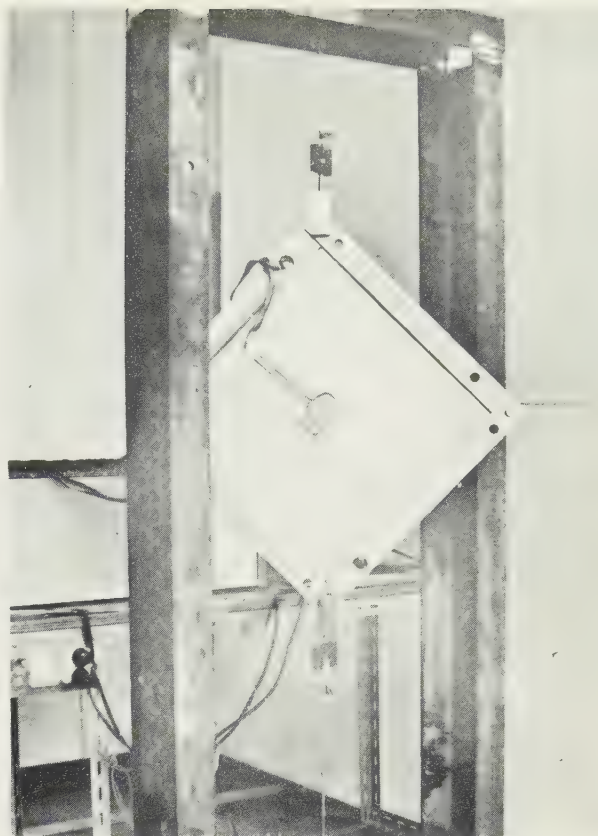
Le coefficient de Poisson  $\nu_y$  est aussi réajusté de façon à conserver la relation

$$\nu_x E_y = \nu_y E_x$$

## Module de cisaillement $G_{xy}$

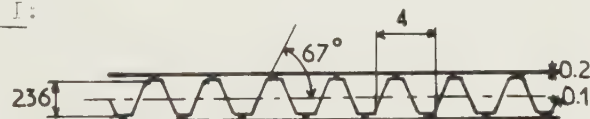
Une plaque carrée est encastrée dans un treillis articulé que l'on soumet à une traction diagonale  $P$ .

La mesure des déformations au centre de la plaque permet de déterminer  $G_{xy}$



Les résultats obtenus expérimentalement, pour une plaque sandwich NORSIAL, concordent avec ceux obtenus par la théorie de la membrane, par LIBOVE et HUBKA [44]. Ceux-ci proposent de calculer ces constantes en fonction des paramètres géométriques et élastiques des divers constituants. Cette détermination donne de bons résultats (5% environ) dans le cas de plaques construites à partir de feuillets métalliques de faible épaisseur.

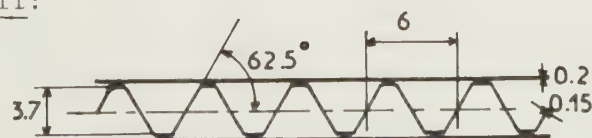
- Plaque NORSIAL I:



|        | $D_x$ | $D_y$ | $\mu_x, \nu_x$ | $D_{xy}$ | $E_x$             | $E_y$              | $G_{xy}$           |
|--------|-------|-------|----------------|----------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Libove | 145   | 120   | 0.30           | 91       | $1.06 \cdot 10^8$ | $0.74 \cdot 10^8$  | $0.596 \cdot 10^8$ |
| Mesure | 142   | 119   | 0.29           | 83.6     | $0.99 \cdot 10^8$ | $0.745 \cdot 10^8$ | $0.612 \cdot 10^8$ |

MKSA

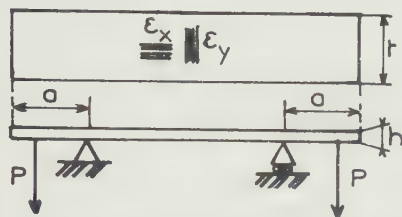
- Plaque NORSIAL II:



|        | $D_x$ | $D_y$ | $\mu_x, \nu_x$ | $D_{xy}$ | $E_x$             | $E_y$              | $G_{xy}$           |
|--------|-------|-------|----------------|----------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Libove | 350   | 288   | 0.310          | 238      | $1.24 \cdot 10^8$ | $0.790 \cdot 10^8$ | $0.616 \cdot 10^8$ |

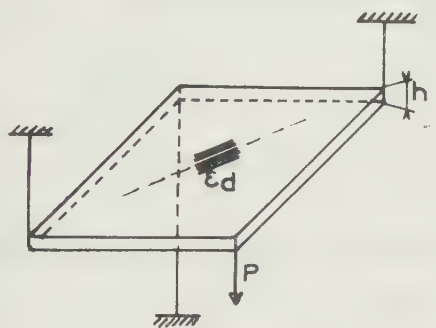


# Mesure des constantes élastiques d'une plaque orthotrope.

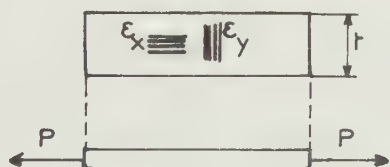


$$D_x = \frac{P a h}{t \Delta \epsilon_x}$$

$$\mu_x = - \frac{\Delta \epsilon_y}{\Delta \epsilon_x}$$

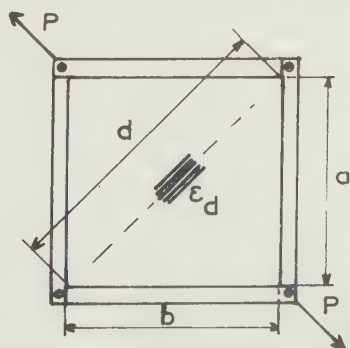


$$D_{xy} = \frac{P h}{2 \Delta \epsilon_d}$$



$$E_x = \frac{P}{t \epsilon_x}$$

$$\nu_x = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$$



$$G_{xy} = \frac{- P a b}{d \epsilon_d}$$

Les mesures de  $D_{qx}$  et  $D_{qy}$  étant quasi-impossibles, nous nous sommes fiés aux résultats de LIBOVE pour la valeur de ces coefficients. L'effet de cisaillement est négligeable pour la plaque NORSIAL I. Les valeurs données par LIBOVE pour la plaque NORSIAL II sont:

$$D_{qx} = 5 \cdot 10^7 \quad \text{MKSA}$$

$$D_{qy} = 3 \cdot 10^7 \quad \text{MKSA}$$

Bien que la précision sur ces coefficients ne soit pas très importante elle suffit, puisque l'effet du cisaillement est du second ordre par rapport aux effets des moments de flexion.

A titre indicatif, il est intéressant de noter que AMBARTSUMYAN [47] détermine ces constantes pour une plaque homogène orthotrope. Nous citerons également HEARMON [42] qui propose des résultats similaires, en négligeant toutefois l'effet du cisaillement.

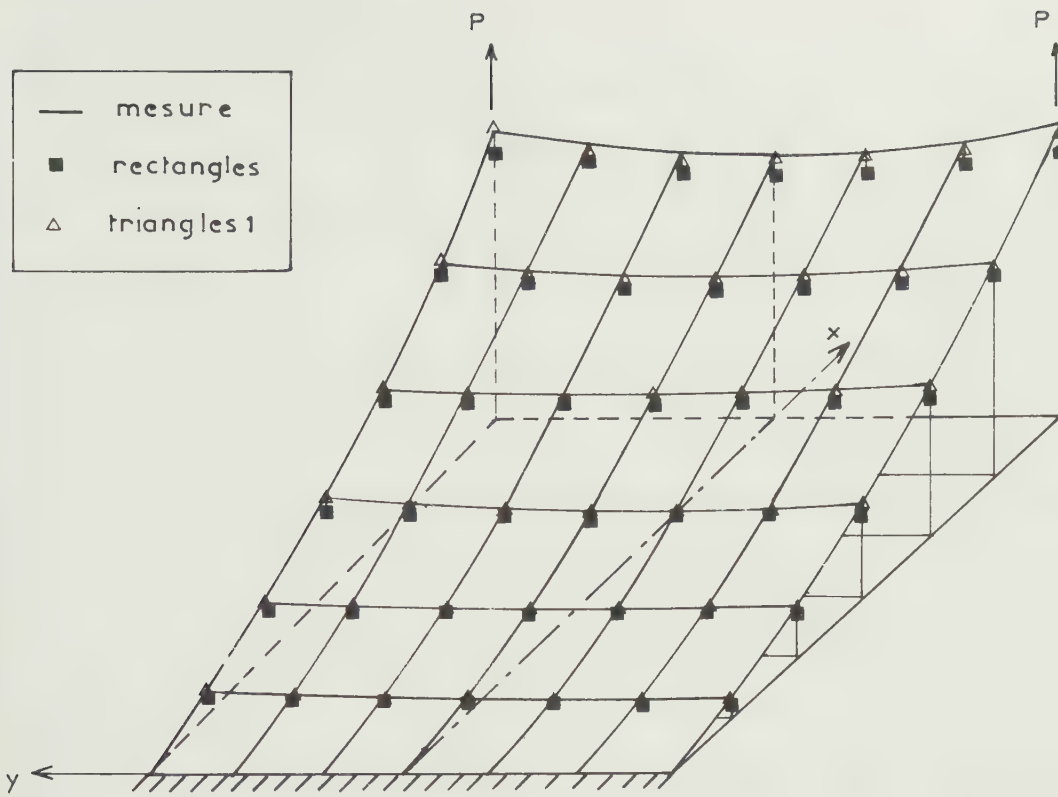
### 33.2 Flexion d'une plaque encastrée :

Nous avons chargé une plaque carrée, encastrée sur un bord, par deux poids identiques appliqués aux deux sommets libres. (Figure 15 )

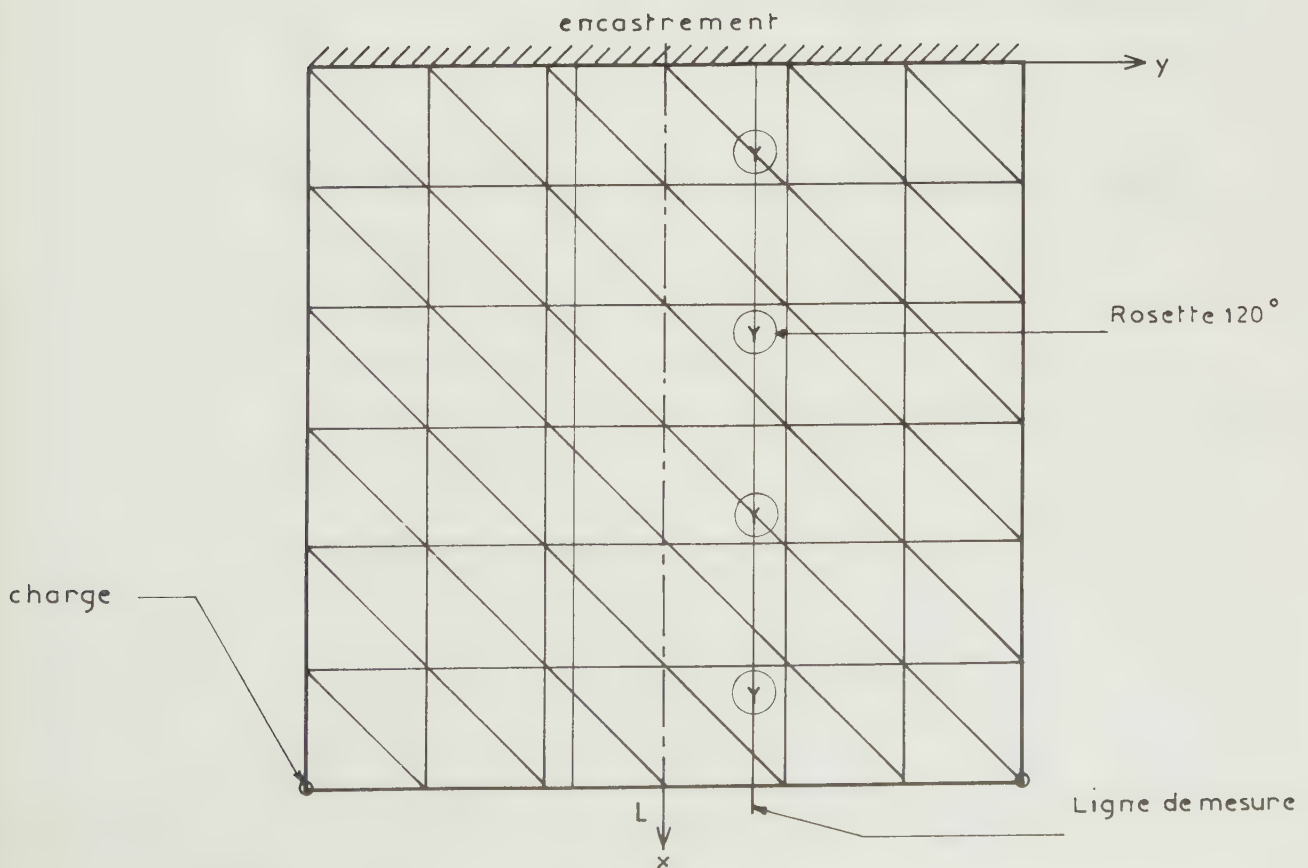
Cette symétrie permet de déterminer les flèches et les déformations avec plus de précision , puisque nous avons ainsi deux points de mesure par face.

Les flèches sont mesurées à l'aide de comparateurs, tandis que les déformations sont mesurées au moyen de jauges de contrainte ( Rosettes  $120^\circ$  ).

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis (18 éléments ) approchent les valeurs mesurées de façon satisfaisante bien qu'il y ait une différence notable pour les déformations  $\epsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  , ces dernières étant très délicates à mesurer car elles sont très faibles.



Figures 16



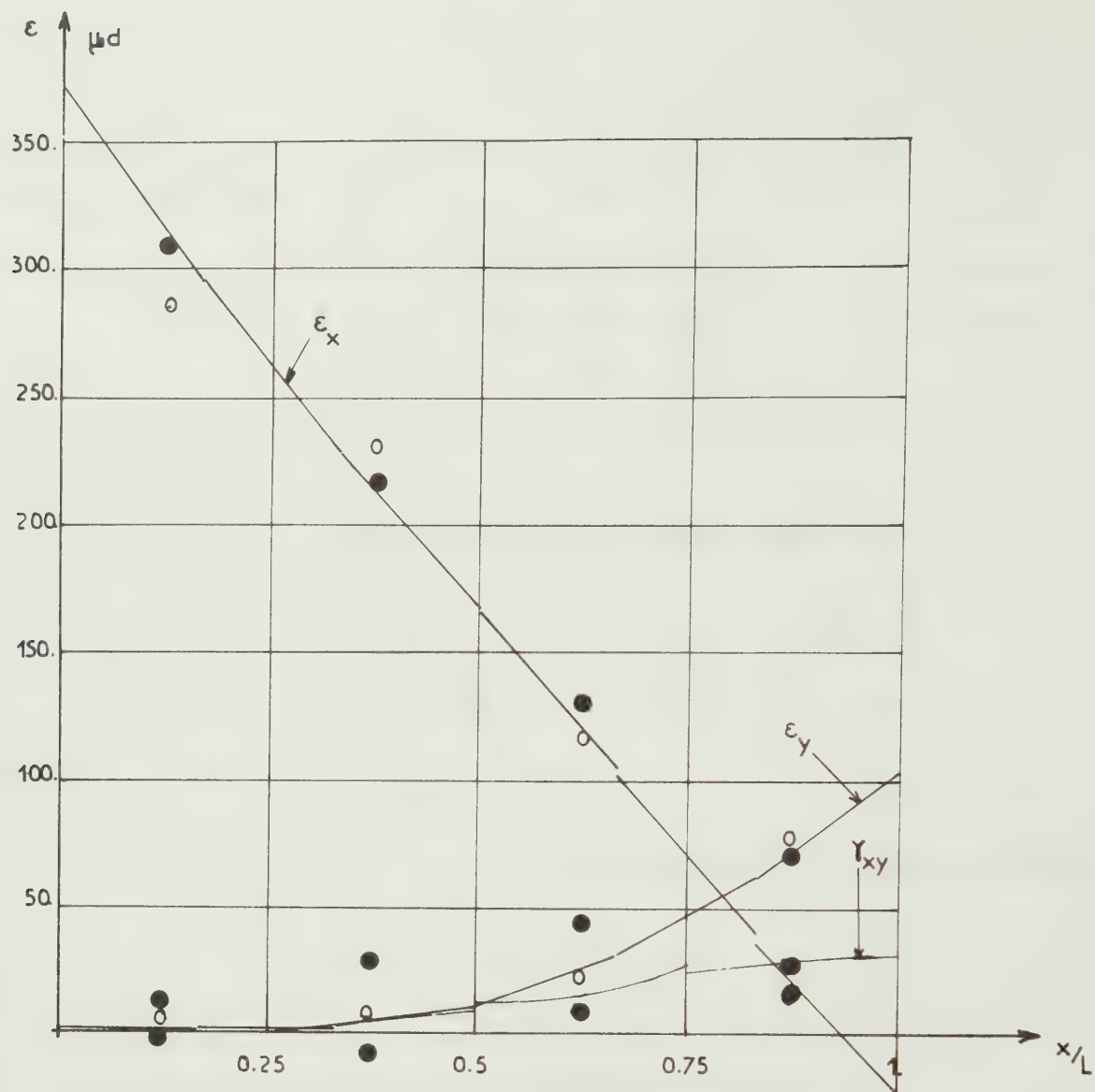
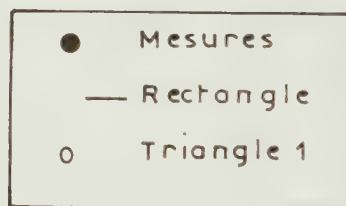


Figure 16 c : Déformations.



### 33.3 Coque sous pression:

#### Montage expérimental.

Le choix de l'expérience est dicté par une condition courante d'utilisation des coques en Aérospatiale, c'est à dire une sollicitation par pression interne. C'est le cas notamment des réservoirs de carburant.

Il est, en outre, important de mettre en évidence les perturbations locales. Un bord encastré est intéressant du point de vue de l'allure des déformations et des efforts. Ses effets s'éteignent rapidement au-delà de la proximité immédiate de l'encastrement.

La conception du dispositif d'essai est guidée par le souci d'approcher au mieux les conditions de bord idéales choisies, à savoir un bord encastré et un bord libre.

L'encastrement est réalisé de manière inamovible sur une couronne d'acier. Le matériau "sandwich" ne se prêtant pas à la soudure par les moyens classiques, le bord est noyé et collé dans une rainure ajustée, pratiquée dans la couronne.

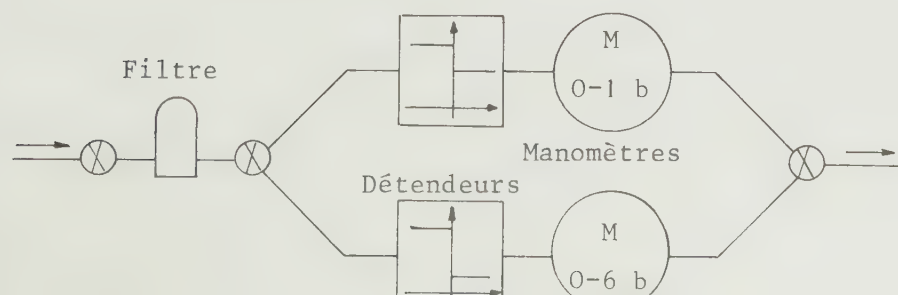
La coque est rendue solidaire d'un plateau circulaire par l'intermédiaire de sa couronne d'encastrement. Ce plateau supporte 6 colonnes métalliques sur lesquelles repose un deuxième plateau identique au précédent. Les deux plateaux constituent le fond et le couvercle de l'enceinte à mettre en pression. Ils doivent encaisser les réactions verticales de la pression et sont renforcés par des nervures soudées, afin de ne pas subir des déformations importantes.

Le plateau supérieur est réglable en hauteur au moyen d'écrous disposés sur l'extrémité filetée des colonnes. Ainsi, il est assujéti à n'être jamais en contact avec le bord supérieur de la coque.

L'étanchéité de l'enceinte est assurée par une vessie souple en caoutchouc (néoprène) de forme et de dimensions identiques à celles des coques. Le jeu "j" est suffisamment faible pour interdire le passage de la membrane.

La vessie comporte deux orifices. L'un permet le remplissage avec de l'eau et la vidange ; l'autre, l'établissement d'une pression supplémentaire au moyen d'air comprimé.

#### Régulation de pression



Un réseau d'air comprimé délivre une pression de 7 bars.

Un dispositif constitué d'un détendeur associé à un manomètre de précision permet d'ajuster et de maintenir la pression à la valeur souhaitée. Suivant la gamme de pression choisie, deux voies équipées (0-1 bar et 0-6 bars) peuvent être sélectionnées pour obtenir la meilleure précision.

#### Equipement et technique de mesure-

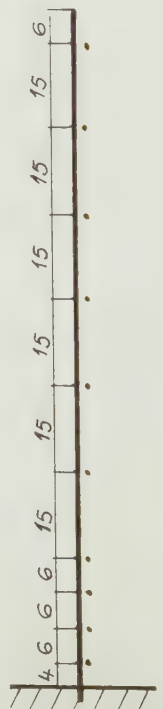
Les déplacements étant très faibles, les seules grandeurs mesurables sont les déformations locales superficielles. La déformation calculée en un point par la méthode des éléments finis est celle de la surface moyenne dans l'épaisseur de la coque, c'est à dire la moyenne des déformations superficielles mesurées en ce point.

Compte-tenu des symétries de révolution affectant la géométrie des coques, les directions principales d'anisotropie, les conditions de bords et les forces appliquées (pression), les directions principales de déformations (et de contraintes) sont les génératrices et les parallèles. En conséquence, des jauges d'extensométrie bidirectionnelles mesurent les déformations suivant les directions principales.

Les jauges utilisées sont auto-compensées relativement à la dilatation thermique du métal sur lequel elles sont collées. L'influence de la pression sur les jauges affecte la mesure d'une quantité inférieure à la résolution du pont (1 micro-déformation) et ne mérite donc pas d'être compensée.

Ces jauges sont implantées intérieurement et extérieurement en des points repérés de la génératrice. Leur espacement est d'autant plus faible que la variation des phénomènes est plus importante (au voisinage de l'encastrement).

Quelques jauges sont aussi placées sur d'autres génératrices pour vérifier la symétrie des déformations. L'utilisation de jauges longues (environ 10 fois le pas de l'ondulé) permet une détermination précise du déplacement radial. Afin de ne pas dépasser la limite élastique du matériau, la proportionnalité des charges et des déformations est vérifiée à chaque étape.



Si  $h$  est l'épaisseur de la coque,  $\epsilon_{is}$  et  $\epsilon_{es}$  les déformations mesurées dans la direction  $S$  à l'intérieur et à l'extérieur de la coque, alors

$$\begin{cases} \epsilon_{is} = \epsilon_S - \frac{h}{2} \chi_S \\ \epsilon_{es} = \epsilon_S + \frac{h}{2} \chi_S \end{cases}$$

où  $\epsilon_S$  est la déformation de la surface moyenne dans la direction  $S$  et  $\chi_S$  la variation de courbure dans cette même direction .

$$\begin{cases} \epsilon_S = \frac{\epsilon_{es} + \epsilon_{is}}{2} \\ \chi_S = \frac{\epsilon_{es} - \epsilon_{is}}{h} \end{cases}$$

De même dans la direction  $\theta$  .

$$\begin{cases} \epsilon_\theta = \frac{\epsilon_{e\theta} + \epsilon_{i\theta}}{2} \\ \chi_\theta = \frac{\epsilon_{e\theta} - \epsilon_{i\theta}}{h} \end{cases}$$

Pour une coque cylindrique de rayon  $R$ , le déplacement radial  $W$  est directement proportionnel à l'allongement  $\epsilon_\theta$

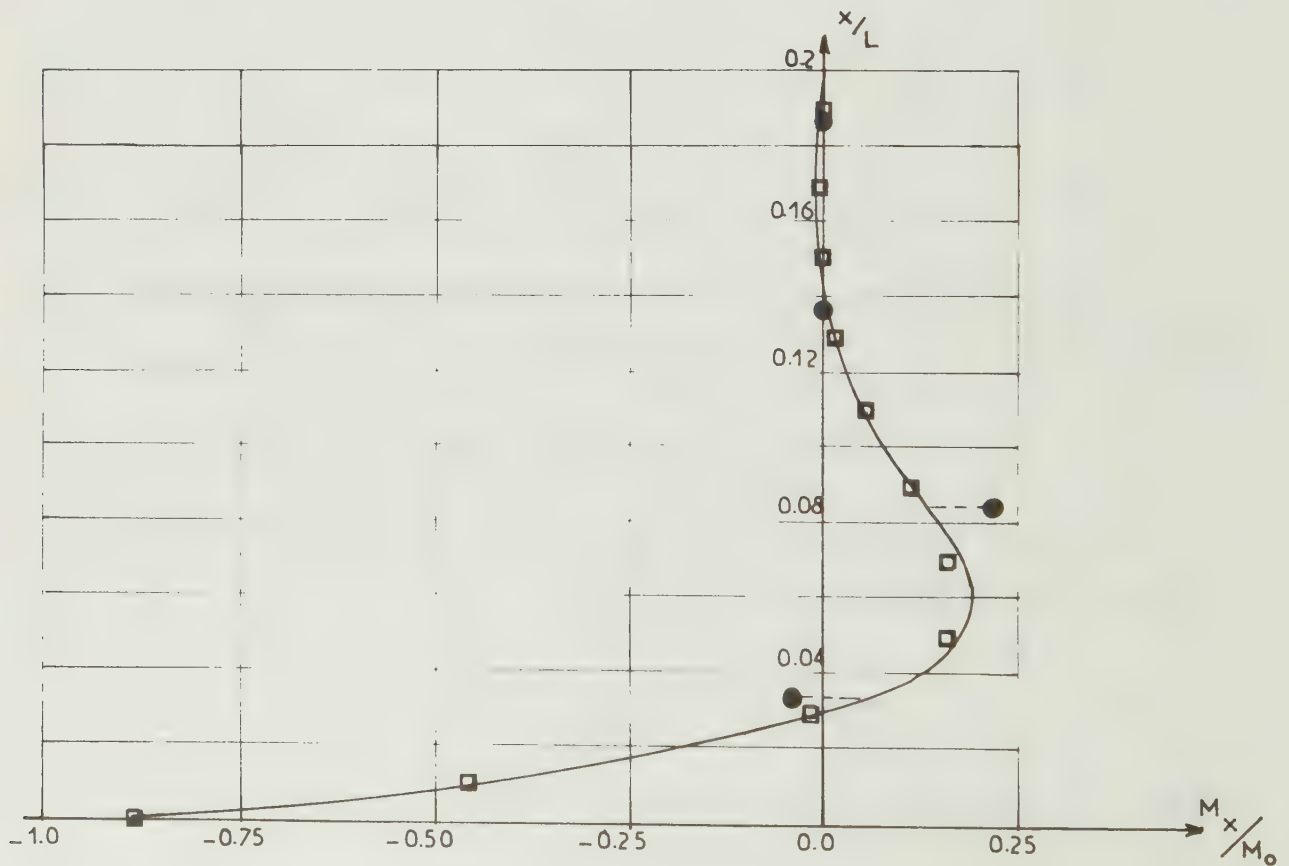
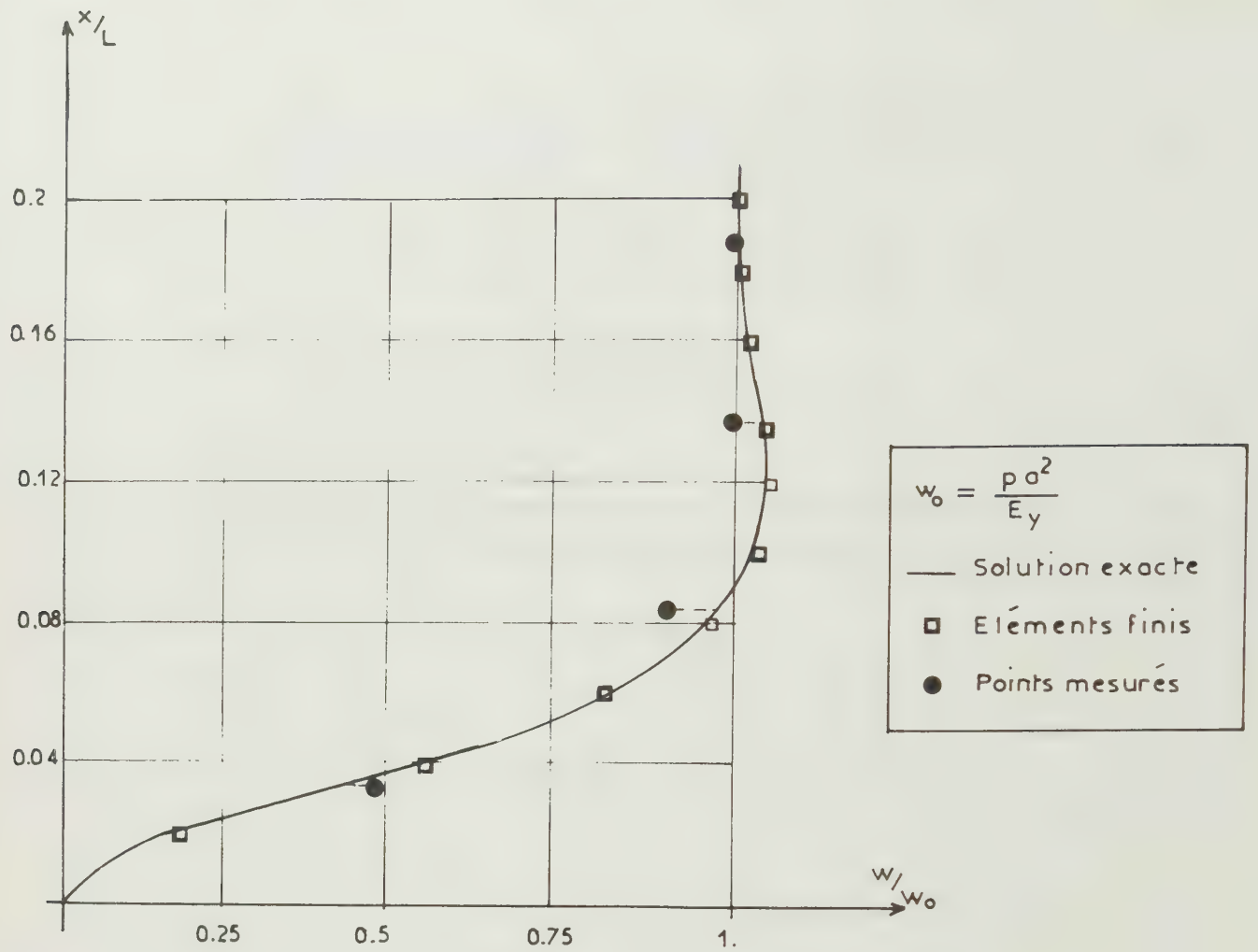
$$W = R \cdot \epsilon_\theta$$

A partir des déformations de la surface moyenne et des variations de courbure, nous calculons :

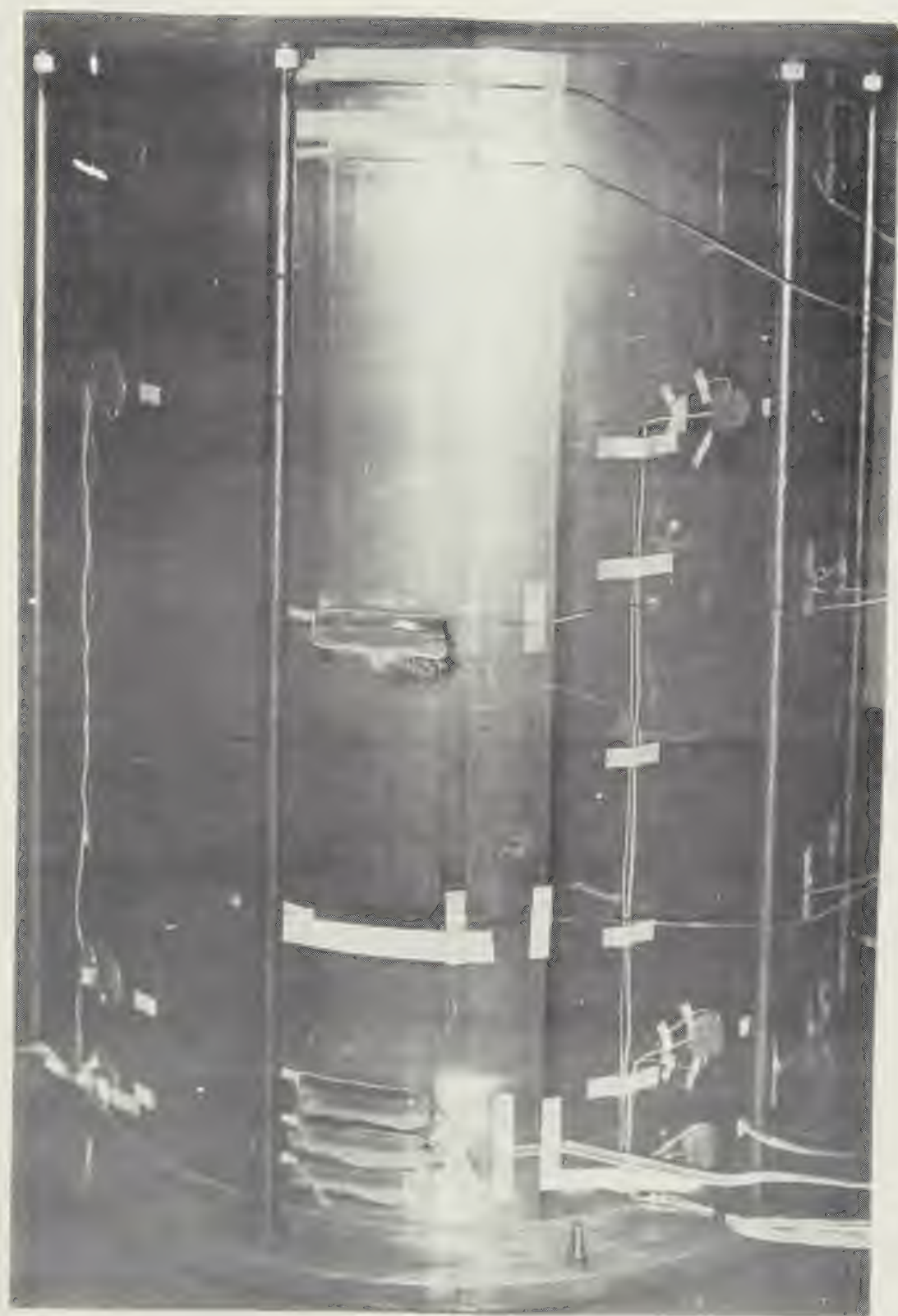
$$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}.$$

d'après les relations forces-déplacements( § 331 )

# Résultats:



$$M = p a^2 \frac{D_x}{L^3}$$





## C O N C L U S I O N

La très bonne concordance entre les résultats obtenus par les solutions analytiques et par la méthode des éléments finis montre que nous avons très correctement rendu compte de cet effet de cisaillement.

Nous espérons que notre travail pourra être utilisé dans certains calculs de plaques et de coques, non seulement dans le domaine élasto-statique, mais aussi dans le domaine élastodynamique.

## ANNEXES

### ANNEXE I - Equations générales des plaques orthotropes et aspect énergétique.

- 11 - Hypothèses.
- 12 - Equations de base.
  - 12.1 - *Relations d'équilibre.*
  - 12.2 - *Déplacements et déformations de la surface moyenne.*
  - 12.3 - *Relations forces-déplacements.*
- 13 - Equations différentielles.
  - 13.1 - *Flexion*
  - 13.2 - *Extension.*
  - 13.3 - *Conditions aux limites.*
- 14 - Energie potentielle de déformation.
- 15 - Minimisation de l'énergie complémentaire de déformation.
  - 15.1 - *Flexion.*
  - 15.2 - *Extension.*

### ANNEXE II : Etude de plaques orthotropes, rectangulaires, chargées transversalement.

- 21 - Plaque en appui simple, sans effet de cisaillement.
- 22 - Plaque rectangulaire avec effet de cisaillement.

### ANNEXE III : Calcul d'une plaque orthotrope en contraintes planes.

### ANNEXE IV : Calcul des coques cylindriques, orthotropes, sous pression constant

ANNEXE I:EQUATIONS GENERALES DES PLAQUES ORTHOTROPES  
ET ASPECT ENERGETIQUE.11 -HYPOTHESES:

Nous nous sommes limités aux seules plaques orthotropes, c'est à dire possédant deux axes perpendiculaires de symétrie élastique dans leur plan, chargées statiquement.

L'hypothèse consistant à négliger les efforts tranchants dans la plaque a été abandonnée et nous avons utilisé la théorie de REISSNER, relative aux plaques orthotropes [34].

Enfin, nous supposons que les déplacements de la surface moyenne restent faibles, ce qui nous conduit à nous limiter au seul domaine élasto-statique.

12 -EQUATIONS DE BASE:

L'étude des contraintes et déformations d'une plaque est réduite à la recherche des efforts et moments, agissant sur les sections perpendiculaires à la surface moyenne, et des déplacements de cette dernière.

12.1 - Relations d'équilibre:

En l'absence de forces de masse et si la charge transversale est  $q$ , par unité de surface, les équations d'équilibre d'un volume élémentaire de plaque  $(dx, dy)$  s'écrivent:

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (12.2 \text{ et } 3)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (12.4)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (12.5)$$

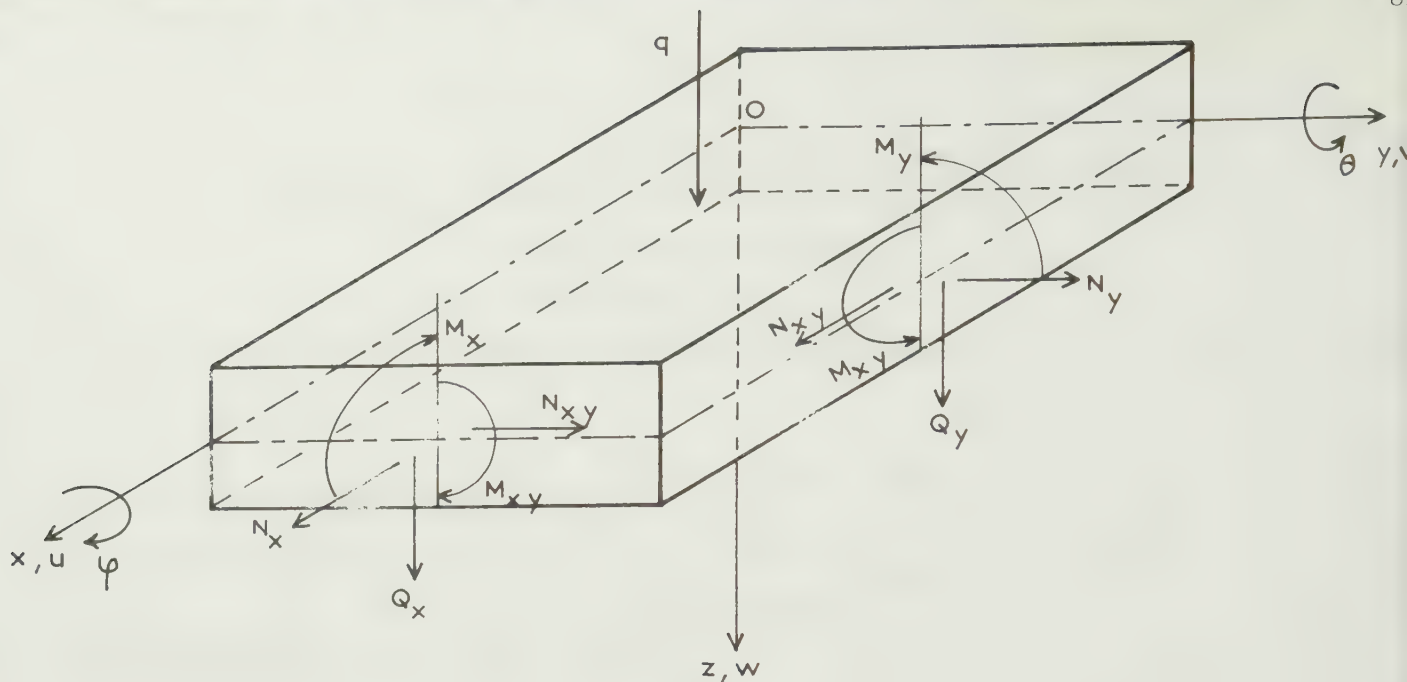


Figure 1. Forces et moments agissant sur un élément

#### 12.2- Déplacements et déformations de la surface moyenne :

Dans le système d'axes  $(x, y, z)$ , les composantes du déplacement de la surface moyenne sont notés  $u, v, w$  (figure 1) les rotations des sections droites seront appelées  $\phi$  et  $\theta$  et les déflexions angulaires de la surface moyenne dues à l'effort tranchant seront notées  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$

A partir de ces grandeurs, nous pouvons définir :

- les pentes de la surface moyenne :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta + \gamma_x \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \phi + \gamma_y \quad (12.6 \text{ et } 7)$$

- Les variations de courbure de la surface moyenne:

$$\chi_x = - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \chi_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- la torsion

$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

- les allongements de la surface moyenne :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (12.8 \text{ et } 9)$$

- le gauchissement:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12.10)$$

### 12.3- Relations forces-déformations :

Si on fait agir successivement  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, \dots$   
 nous pouvons définir les paramètres élastiques suivants : ([43] à [46])

- les modules de rigidité à la flexion :

$$D_x = \frac{M_x}{\chi_x} \quad \text{et} \quad D_y = \frac{M_y}{\chi_y}$$

- les coefficients de Poisson associés à la flexion :

$$\mu_x = - \frac{\chi_y}{\chi_x} \quad \text{quand } M_x \text{ agit seul, } \mu_y = - \frac{\chi_x}{\chi_y} \quad \text{quand } M_y \text{ agit seul}$$

avec  $\mu_x D_y = \mu_y D_x$  d'après le théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI.

- le module de torsion

$$D_{xy} = \frac{M_{xy}}{\chi_{xy}}$$

- les modules de cisaillement transversaux

$$D_{qx} = \frac{Q_x}{\gamma_x} \quad \text{et} \quad D_{qy} = \frac{Q_y}{\gamma_y}$$

- les modules de rigidité en extension :

$$E_x = \frac{N_x}{\epsilon_x} \quad E_y = \frac{N_y}{\epsilon_y}$$

- Les coefficients de Poisson associés à l'extension.

$$\nu_x = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad \nu_y = - \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$$

avec  $\nu_x E_y = \nu_y E_x$  d'après le théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI.

- le module de cisaillement

$$G_{xy} = \frac{N_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

La superposition de l'effet de chacune des forces conduit aux relations entre les forces et déformations suivantes :

- en flexion

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{M_x}{D_x} + \frac{\mu_y}{D_y} M_y \quad (12.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{M_y}{D_y} + \frac{\mu_x}{D_x} M_x \quad (12.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2 M_{xy}}{D_{xy}} \quad (12.13)$$

et en extension

$$\epsilon_x = \frac{N_x}{E_x} - \frac{\nu_y}{E_y} N_y \quad (12.14)$$

$$\epsilon_y = \frac{N_y}{E_y} - \frac{\nu_x}{E_x} N_x \quad (12.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{G_{xy}} \quad (12.16)$$

Pour des plaques isotropes, homogènes, les divers coefficients se réduisent à :

$$D_x = D_y = \frac{Eh^3}{12}$$

$$D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}$$

$$D_{qx} = D_{qy} = \frac{5}{12} \frac{Eh}{(1+\nu)}$$

$$\mu_x = \mu_y = \nu_x = \nu_y = \nu$$

$$E_x = E_y = Eh$$

$$G_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}$$

$h$  étant l'épaisseur de la plaque,  
 $E$  le module d'Young du matériau,  
 $\nu$  son coefficient de Poisson.

13 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES:13.1- Flexion

La résolution du système concernant la flexion peut se réduire à l'étude d'un couple d'équations différentielles (REISSNER [30] [31] [32])

Si on introduit une fonction de forces U telle que

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial y} - Q \quad (13.1)$$

$$Q_y = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (13.2)$$

avec Q telle que la relation d'équilibre (12.1) soit vérifiée.

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (13.3)$$

En reportant ces relations (13.1 et 2) dans les équations précédentes, on obtient le système différentiel: [45]

$$f_1 + \left( \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_x \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{D_{xy}}{2D_{qx}} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) U = - \frac{1}{1-\mu_x \mu_y} \left( D_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} + H_{xy} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) w \quad (13.4)$$

$$f_2 + \left( - \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{D_{xy}}{2D_{qy}} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) U = - \frac{1}{1-\mu_x \mu_y} \left( D_y \frac{\partial^3}{\partial y^3} + H_{xy} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) w \quad (13.5)$$

avec :

$$H_{xy} = D_{xy} (1 - \mu_x \mu_y) + \mu_x D_y \quad (a)$$

$$\alpha_x = \frac{1}{1-\mu_x \mu_y} \left( \frac{D_x}{D_{qx}} - \frac{D_{xy} (1-\mu_x \mu_y) + 2\mu_x D_y}{D_{qy}} \right) \quad (b)$$

$$\alpha_y = \frac{1}{1-\mu_x \mu_y} \left( \frac{D_y}{D_{qy}} - \frac{D_{xy} (1-\mu_x \mu_y) + 2\mu_x D_y}{D_{qx}} \right) \quad (c)$$

$$f_1 = -Q + \frac{1}{D_{qx}} \left( \frac{D_x}{1-\mu_x \mu_y} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{D_{xy}}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) \quad (d)$$

$$f_2 = \frac{D_{xy} (1-\mu_x \mu_y) + 2\mu_x D_y}{2(1-\mu_x \mu_y) D_{qx}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \quad (e)$$

Les relations (13.4) et (13.5) peuvent être découplées et l'on obtient l'équation différentielle en  $w$  sous la forme.

$$a_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + a_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + b_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g \quad (13)$$

expression dans laquelle

$$a_1 = \frac{D_x D_{xy}}{2D_{qx}}$$

$$b_1 = -D_x$$

$$a_2 = \frac{D_x D_{xy}}{2D_{qx}} + \frac{D_x D_y - \mu_x D_{xy} D_{xy}}{D_{qy}}$$

$$b_2 = -2H_{xy}$$

$$a_3 = \frac{D_y D_{xy}}{2D_{qy}} + \frac{D_x D_y - \mu_y D_{xy} D_{xy}}{D_{qx}}$$

$$b_3 = -D_y$$

$$a_4 = \frac{D_y D_{xy}}{2D_{qx}}$$

(13.8a à 13.8g)

$$g = - \left\{ \frac{a_1}{D_{qx}} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{D_x D_y - \mu_x D_{xy} D_{xy}}{D_{qx} D_{qy}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a_4}{D_{qy}} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} q + \dots$$

$$\dots - \left\{ \left[ \frac{1}{2} \frac{D_{xy} (1-\mu_x \mu_y)}{D_{qx}} + \frac{D_y}{D_{qy}} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left[ \frac{1}{2} \frac{D_{xy} (1-\mu_x \mu_y)}{D_{qy}} + \frac{D_x}{D_{qx}} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} q + \dots$$

$$\dots - \{ (1 - \mu_x \mu_y) \} q$$

(13.8h)

### 13.2- Extension.

L'examen des relations d'équilibre (12.2) et (12.3) permet d'introduire une fonction  $F$ , semblable à la fonction d'Airy, telle que :

$$N_x = \nu_y E_x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$N_y = \nu_x E_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$N_{xy} = - \nu_x E_y \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Il en résulte que l'équation de compatibilité

$$\frac{\partial}{\partial y^2} (\varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\varepsilon_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\gamma_{xy})$$

s'écrit :

$$\nu_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{\nu_x E}{G_{xy}} - 2 \nu_x \nu_y \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (13.9)$$

Les équations différentielles (13.7) et (13.9) seront résolues, dans des cas particuliers, en annexes II et III.

### 13.3- Condition aux limites.

Les équations différentielles précédentes ne peuvent être résolues entièrement que si les conditions de bord sont précisées.

Nous nous limiterons aux trois cas classiques que nous supposons appliquées à un bord parallèle à l'axe des y. (figure 1)

Bord libre:  $M_x = 0$  ou  $\overline{M}_x$  les forces sont toutes nulles, sauf si l'on applique certaines charges sur ce bord,

$M_{xy} = 0$  ou  $\overline{M}_{xy}$  auquel cas, les forces citées sont connues.

$$Q_x = 0 \text{ ou } \overline{Q}_x$$

$$N_x = 0 \text{ ou } \overline{N}_x$$

$$N_{xy} = 0 \text{ ou } \overline{N}_{xy}$$

Bord simplement supporté sur toute l'épaisseur :

$$w = 0$$

$$M_x = 0 \text{ ou } \overline{M}_x$$

$$\frac{Q_y}{D_{qy}} = 0$$

Bord encastré entièrement :

$$w = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{Q_x}{D_{qx}} = 0$$

$$\frac{Q_y}{D_{qy}} = 0$$

Si, les supports ne sont appliqués qu'à la surface moyenne, la dernière relation est remplacée par  $M_{xy} = 0$ , puisque les sections peuvent tourner autour de la surface moyenne. [45]

#### 14 - ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:

Si l'on considère un volume élémentaire de dimension  $dx, dy$  (figure 2) le travail de chacune des forces en présence peut être exprimé sous la forme mixte.

en flexion :

$$d\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \left\{ -M_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - M_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - M_{xy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y \right\} dx dy \quad (14.1)$$

et en extension :

$$d\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy \quad (14.2)$$

#### 15- MINIMISATION DE L'ENERGIE COMPLEMENTAIRE DE DEFORMATION:

##### 15.1- Flexion

L'énergie potentielle de déformation peut être exprimée en fonction des déplacements  $w, \phi$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \left\{ \frac{D_x}{1-\mu_x \mu_y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\mu_x D_y}{1-\mu_x \mu_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{D_y}{1-\mu_x \mu_y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{D_{xy}}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + D_{qx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + D_{qy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi \right)^2 \right\} dx dy \quad (15.1) \end{aligned}$$

Le travail des forces extérieures, quand la charge transversale est répartie  $q(x, y)$  s'exprime sous la forme différentielle

$$d\mathcal{A} = q w dx dy \quad (15.2)$$

L'énergie complémentaire de déformation  $\Phi_f$  sera minimum si sa première variation est nulle.

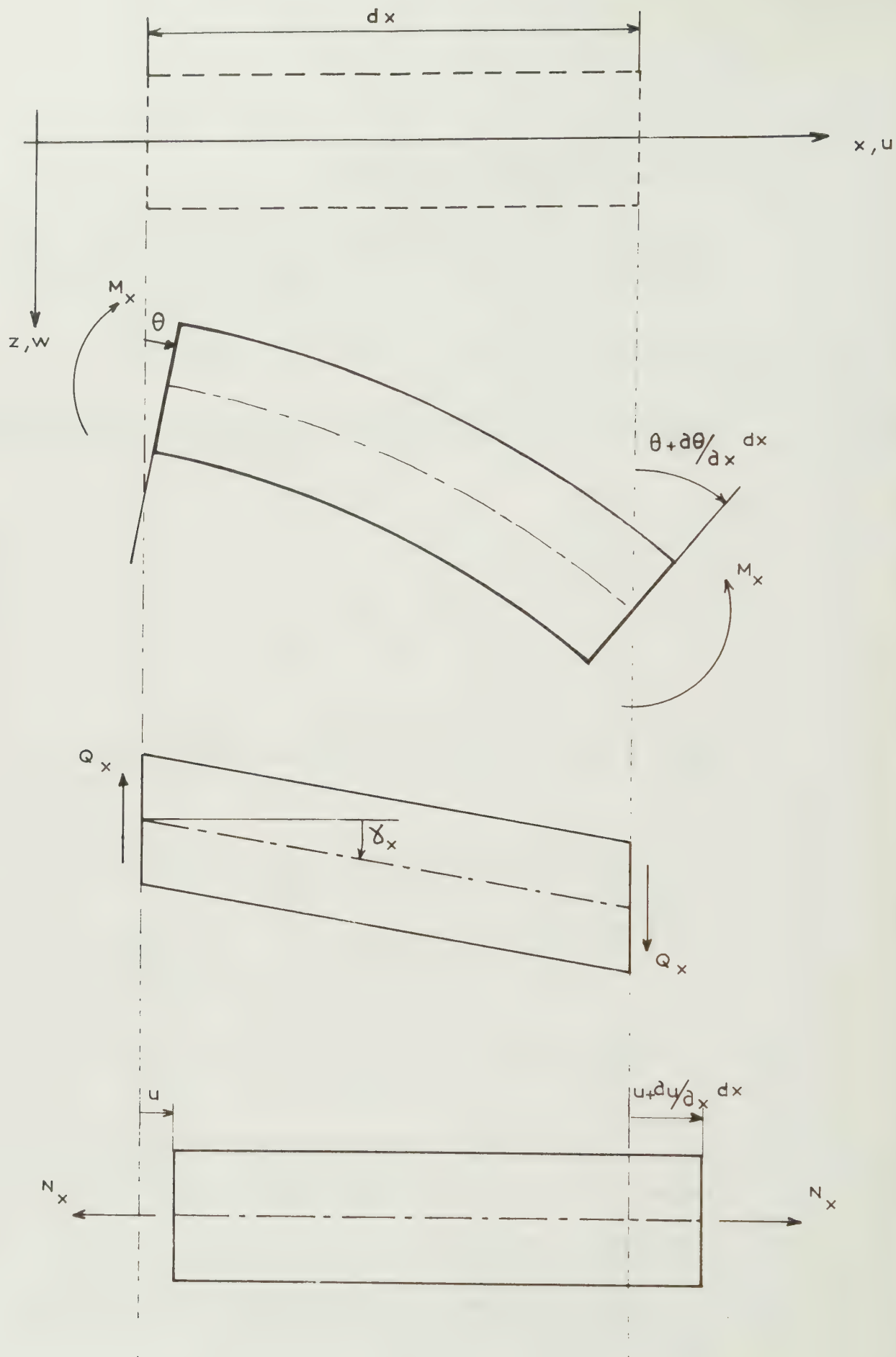


Figure 2 Déformations élémentaires

soit :

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} f, \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} f, \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial w} f$$

Ces trois relations, après intégration par partie des différents termes, si les conditions aux limites sont réalisées (§ 133) entraînent

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

Nous retrouvons les équations d'équilibre d'un volume élémentaire.

Par conséquent, l'énergie complémentaire de déformation  $\Phi_f$  n'est minimum que si

- les conditions aux limites sont respectées
- les relations d'équilibre sont vérifiées.

### 15.2- Extension.

L'énergie potentielle de déformation peut être exprimée uniquement en fonction des déplacements  $u$  et  $v$ .

$$d\mathcal{E}_e = \left\{ \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x \nu_y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + G_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy$$

La démonstration est identique à celle du paragraphe précédent et conduit aux relations d'équilibre.

De même, pour que l'énergie complémentaire de déformation  $\Phi_e$  n'est minimum que si

- les conditions aux limites sont respectées
- les relations d'équilibre sont vérifiées

La résolution des équations différentielles en  $w$  ou en  $F$  est absolument identique au problème de la minimisation de l'énergie complémentaire de déformation puisque les deux façons de procéder conduisent aux mêmes relations.

## ANNEXE II:

ETUDE DE PLAQUES ORTHOTROPES, RECTANGULAIRES,  
CHARGÉES TRANSVERSALEMENT.

21 - Plaque en appui simple, sans effet de cisaillement, chargée uniformément:

Dans l'hypothèse où l'effet de cisaillement est négligeable, c'est à dire que les modules  $D_{qx}$  et  $D_{qy}$  sont très grands, l'équation différentielle régissant la flèche  $w$  s'écrit:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 H_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (1.1)$$

$$\text{avec } H_{xy} = D_{xy} (1 - \mu_x \mu_y) + \mu_x D_y$$

La méthode de LEVY [38] consiste à chercher la solution  $w$  sous la forme de série :

$$w = \sum_m Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.2.)$$

Cette fonction vérifiant les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3.)$$

Cette façon de procéder nécessite le développement de la charge transversal en  $q = \sum_m q_m \sin \frac{m\pi x}{a}$  (1.4.)

$$\text{avec } q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \quad \text{pour } m \text{ impair} \quad (1.5.)$$

$$q_m = 0 \quad \text{pour } m \text{ pair}$$

$Y_m$  est donc solution de :

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_x Y_m - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} H_{xy} \frac{d^2 Y_m}{dx^2} + D_y \frac{d^4 Y_m}{dy^4} = q_m \quad (1.6)$$

Posons

$$\mu = \frac{H_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (1.7)$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \cdot \frac{m \pi}{a}$$

L'équation caractéristique correspondant à (1.6.) est donc :

$$\gamma^4 - 2 \mu \gamma^2 r^2 + r^4 = 0 \quad (1.8)$$

Puisque nous cherchons une solution exacte pour tester les résultats de la méthode des éléments finis, nous pouvons nous limiter à  $\mu < 1$

Les racines sont donc :

$$r = \pm \gamma \left( \sqrt{\frac{1+\mu}{2}} \pm j \sqrt{\frac{1-\mu}{2}} \right)$$

La charge transversale  $q$  étant symétrique par rapport à l'axe  $x$ ,  $w$  est limitée à une fonction

$$W = \sum_m \left( A_1 \operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y + A_2 \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y + \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D_x} \right) \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (1.9)$$

$$\text{avec } \alpha_m = \gamma \sqrt{\frac{1+\mu}{2}}$$

$$\beta_m = \gamma \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}$$

Le bord  $y = \frac{b}{2}$  reposant sur un appui simple,  $w$  doit être telle que

$$w \left( \frac{b}{2} \right) = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{b}{2} \right) = 0 \quad x$$

Ces deux relations permettent de déterminer  $A_1$  et  $A_2$ .

$$A_1 = - \frac{(\alpha_m^2 - \beta_m^2) \operatorname{Sh} \sin + 2 \alpha_m \beta_m \operatorname{Ch} \cos}{2 m^4 \pi^4 D_x \alpha_m \beta_m (\operatorname{Ch}^2 \cos^2 + \operatorname{Sh}^2 \sin^2)} q_m a^4 \quad (1.6)$$

$$A_2 = \frac{(\alpha_m - \beta_m) \operatorname{Ch} \cos - 2 \alpha_m \beta_m \operatorname{Sh} \sin}{2 m^4 \pi^4 D_x \alpha_m \beta_m (\operatorname{Ch}^2 \cos^2 + \operatorname{Sh}^2 \sin^2)} q_m a^4$$

$$\operatorname{Ch} = \operatorname{Ch}(\alpha_m b_{/2}) \quad \operatorname{Sh} = \operatorname{Sh}(\alpha_m b_{/2}) \quad \cos = \cos(\beta_m b_{/2}) \quad \sin = \sin(\beta_m b_{/2})$$

Il est ensuite aisé d'obtenir les rotations, les moments et les efforts tranchants dans la plaque.

Nous poserons

$$d_m = \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D_x}$$

$$\phi = \sum_m \{ (A_1 \alpha_m + A_2 \beta_m) \operatorname{sh} \alpha_m y \cos \beta_m y + (A_2 \alpha_m - A_1 \beta_m) \operatorname{ch} \alpha_m y \sin \beta_m y \} \sin \frac{m \pi x}{a}$$

$$\theta = \sum_m \frac{m \pi}{a} \{ A_1 \operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y + A_2 \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y + d_m \} \cos \frac{m \pi x}{a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_m \{ [A_1 (\alpha_m^2 - \beta_m^2) + 2 A_2 \alpha_m \beta_m] \operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y + [A_2 (\alpha_m^2 - \beta_m^2) - 2 A_1 \alpha_m \beta_m] \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y \} \sin \frac{m \pi x}{a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \sum_m - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \{ A_1 \operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y + A_2 \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y + d_m \} \sin \frac{m \pi x}{a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 \sum_m \frac{m \pi}{a} \{ (A_1 \alpha_m + A_2 \beta_m) \operatorname{sh} \alpha_m y \cos \beta_m y + (A_2 \alpha_m - A_1 \beta_m) \operatorname{ch} \alpha_m y \sin \beta_m y \} \cos \frac{m \pi x}{a}$$

$$M_x = - \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\}$$

$$M_y = - \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}$$

$$M_{xy} = - \frac{D_{xy}}{2} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}$$

## 22 - Plaque rectangulaire avec effet de cisaillement:

Nous avons choisi pour exemple-test, celui d'une plaque reposant sur deux appuis parallèles ( $x=0$  et  $x=a$ ) et encastrée sur les deux autres bords ( $y = \pm \frac{b}{2}$ )

Le choix de conditions limite d'encastrement a été guidé par le souci d'introduire un cas où les efforts tranchants  $Q_x$  et  $Q_y$  sont importants.

Nous déterminons tout d'abord une solution particulière du type  $w = w(x)$ .

La plaque étant appuyée sur les bords  $x = 0$  et  $x = a$ , cette solution s'exprime sous forme de développement :

soit la charge :

$$q = a_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$p = \frac{m\pi}{a}$$

d'où

$$Q_x = \frac{a_m}{p} \cos p x$$

$$M_x = \frac{a_m}{p^2} \sin p x$$

$$W = \alpha_m \sin p x$$

$$\text{avec } \alpha_m = \frac{a_m}{p} \left\{ \frac{(1-\mu_x \mu_y)}{D_x p^2} + \frac{1}{D_{qx}} \right\}$$

La solution générale est obtenue à partir de l'équation différentielle (13.7)

$$W = \sum \sum C_{mi} e^{r_i y} \sin p x$$

$r_i$  étant les racines de l'équation caractéristique :

$$A_1 r^6 + A_2 r^4 + A_3 r^2 + A_4 = 0$$

$$A_1 = a_4 \quad A_3 = a_2 p^4 - b_2 p^2$$

$$A_2 = b_3 - a_3 p^2 \quad A_4 = b_1 p^2 - a_1 p^6$$

$a_i$  et  $b_i$  étant définis par les relations (13.8)

La recherche des solutions de l'équation caractéristique en  $r^2$  montre que pour certains types de plaques sandwich (NORSIAL) :

- une racine  $r^2$  est positive réelle;
- les deux autres racines sont soit réelles positives,
- soit complexes conjuguées.

Ces deux cas dépendent non seulement des paramètres élastiques, mais aussi de l'indice  $m$ . Il y a donc lieu d'étudier les deux cas 1 et 2.

Cas 1: Racines toutes réelles  $r_i$

$$W = \sum_m \left( \sum_i C_i \operatorname{Ch} r_i y + \alpha_m \right) \sin p x$$

La fonction de forces  $F$  correspondantes est (13.4)

$$F = \sum_m \left( \sum_i C_i k_i \operatorname{sh} r_i y \right) \cos p x$$

$$\text{Avec } k_i = \frac{-D_x p^3 + H_{xy} p \cdot r_i^2}{(1-\mu_x \mu_y) (r_i + \alpha_x p^2 r_i - \frac{D_{xy}}{2 D_{qx}} r_i^3)}$$

Les déplacements s'écrivent :

$$W = (\alpha_m + C_i \operatorname{Ch} r_i y) \sin p x$$

$$\phi = \left( r_i - \frac{p k_i}{D_{qy}} \right) C_i \operatorname{sh} r_i y \sin p x$$

$$\Theta = \left( C_i \frac{(p - k_i r_i)}{D_{qx}} \operatorname{Ch} r_i y + \frac{a_m}{p^3 D_x} (1 - \mu_x \mu_y) \right) \cos p x$$

et les forces:

$$Q_x = \left( \frac{a_m}{p} + k_i r_i C_i \operatorname{Ch} r_i y \right) \cos p x$$

$$Q_y = k_i p C_i \operatorname{Sh} r_i y \sin p x$$

$$M_x = \left( \frac{a_m}{p^2} + \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \left( p \frac{(p - k_i r_i)}{D_{qx}} - \mu_y r_i \frac{(r_i - p k_i)}{D_{qy}} \right) \operatorname{Ch} r_i y \right) \sin p x$$

$$M_y = \left( \mu_y \frac{a_m}{p^2} + \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \left( r_i \frac{(r_i - p k_i)}{D_{qy}} - \mu_x p \frac{(p - k_i r_i)}{D_{qx}} \right) \operatorname{Ch} r_i y \right) \sin p x$$

$$M_{xy} = \frac{D_{xy}}{2} \left( 2 p r_i - k_i \left( \frac{p^2}{D_{qy}} + \frac{r_i^2}{D_{qx}} \right) \right) \operatorname{Sh} r_i y \cos p x$$

Les conditions aux limites  $y = \pm b/2$  permettent de déterminer les constantes  $C_i$ .

Cas 2: 1 racine réelle  $r_1$  et deux racines complexes  $r \pm js$

Nous introduisons les constantes suivantes:

$$c_y = p \left( 1 + \frac{D_{xy} p^2}{2D_{qy}} \right)$$

$$b_y = \frac{p^2 H_{xy}}{1 - \mu_x \mu_y}$$

$$a_y = - \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y}$$

$$e_1 = a_y (r^3 - 3rs^2) + rb_y$$

$$e_2 = a_y (3r^2s - s^3) + sb_y$$

$$e_3 = c_y - p\alpha_y (r^2 - s^2)$$

$$D_2 = f C_2 + g C_3$$

$$D_3 = f C_3 - g C_2$$

$$d = e_3^2 + 4 r^2 s^2 p^2 \alpha_y^2$$

$$f = (e_1 e_3 - 2p\alpha_y r s e_2) / d$$

$$g = (e_2 e_3 + 2p\alpha_y r s e_1) / d$$

$$G_1 = rf C_2 + rg C_3 - sg C_2 + sf C_3$$

$$G_2 = rf C_3 - rg C_2 - sg C_3 - sf C_2$$

D'où les déplacements :

$$w = (\alpha_m + C_1 \text{Chr}_1 y + C_2 \text{Chry} \cos y + C_3 \text{Shry} \sin y) \sin x$$

$$\phi = ((r_1 - \frac{pk_1}{D_{qy}}) C_1 \text{Shr}_1 y + (C_2 r + C_3 s - \frac{pD_2}{D_{qy}}) \text{Shry} \cos y + \dots \\ \dots (C_3 r - C_2 s - \frac{pD_3}{D_{qy}}) \text{Chry} \sin y) \cos x$$

$$\theta = (\frac{a_m (1 - \mu_x \mu_y)}{p^3 D_x} + (p - \frac{k_1 r_1}{D_{qx}}) C_1 \text{Chr}_1 y + \dots \\ \dots (pC_2 - \frac{G_1}{D_{qx}}) \text{Chry} \cos y + (pC_3 - \frac{G_2}{D_{qx}}) \text{Shry} \sin y) \cos x$$

Et les forces:

$$Q_x = (\frac{a_m}{p} + k_1 r_1 C_1 \text{Chr}_1 y + G_1 \text{Chry} \cos y + G_2 \text{Shry} \sin y) \cos x$$

$$Q_y = (pk_1 C_1 \text{Chr}_1 y + pD_2 \text{Shry} \cos y + pD_3 \text{Chry} \sin y) \sin x$$

Les moments sont déterminés par les relations:

$$M_x = -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)$$

$$M_y = -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{D_{xy}}{2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y} = & \left( r_1 \left( r_1 - \frac{pk_1}{D_{qy}} \right) C_1 \operatorname{Chr}_1 y + \left( C_2 (r^2 - s^2) + 2C_3 rs - \frac{pG_1}{D_{qy}} \right) \operatorname{Chry} \operatorname{cosy} + \dots \right. \\ & \left. \dots \left( C_3 (r^2 - s^2) - 2C_2 rs - \frac{pG_2}{D_{qy}} \right) \operatorname{Shry} \operatorname{sinsy} \right) \sin px \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} = & \left( \frac{-a_m (1-\mu_x\mu_y)}{p^2 D_x} - p \left( p - \frac{k_1 r_1}{D_{qx}} \right) C_1 \operatorname{Chr}_1 y - p \left( pC_2 - \frac{G_1}{D_{qx}} \right) \operatorname{Chry} \operatorname{cosy} \dots \right. \\ & \left. \dots - p \left( pC_3 - \frac{G_2}{D_{qx}} \right) \operatorname{Shry} \operatorname{sinsy} \right) \sin px \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = & \left( \left( 2pr_1 - k_1 \left( \frac{r_1^2}{D_{qx}} + \frac{p^2}{D_{qy}} \right) \right) C_1 \operatorname{Shr}_1 y + \dots \right. \\ & \dots + \left( 2C_2 pr + 2C_3 ps - \frac{p^2 D_2}{D_{qy}} - \frac{G_1 r + G_2 s}{D_{qx}} \right) \operatorname{Shry} \operatorname{cosy} + \dots \\ & \left. \dots + \left( 2C_3 pr - 2C_2 ps - \frac{p^2 D_3}{D_{qy}} - \frac{G_2 r - G_1 s}{D_{qx}} \right) \operatorname{Chry} \operatorname{sinsy} \right) \cos px \end{aligned}$$

La forme des solutions est générale pour une plaque appuyée sur deux cotés opposés. Les constantes  $C_i$ , et par suite  $D_i$  et  $G_i$ , sont déterminées par les conditions limite correspondant aux deux autres cotés. Toutefois, nous n'avons développé la solution que dans le cas d'une charge et de conditions symétriques par rapport à l'axe des  $x$ .

## ANNEXE III:

## CALCUL D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE EN CONTRAINTES PLANES

En annexe I nous avons indiqué que la fonction d'Airy est solution de l'équation différentielle:

$$\nu_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \left( \frac{\nu_x E_y}{G_{xy}} - 2\nu_x \nu_y \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0$$

Par conséquent, toute fonction  $F_k(x + \alpha_k y)$ , dérivable quatre fois, est solution si  $\alpha_k$  vérifie:

$$\nu_y \alpha_k^4 + \left( \frac{\nu_x E_y}{G_{xy}} - 2\nu_x \nu_y \right) \alpha_k^2 + \nu_x = 0$$

Les racines de cette équation sont imaginaires si:

$$G_{xy} < E_x \sqrt{\nu_x \nu_y} / 2\nu_x (1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})$$

( Cette condition est réalisée pour les plaques NORSIAL que nous avons utilisés. )

Posons:

$$\alpha_k = i \beta_k$$

$$z_k = x + i \beta_k y$$

$$\phi_k(z_k) = \nu_x E_y F'_k(z_k)$$

avec  $\beta_k < 0$

Les contraintes sont donc:

$$N_x = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^2 -\beta_k^2 \phi'_k(z_k) \right) + p$$

$$N_y = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^2 \phi'_k(z_k) \right)$$

$$N_{xy} = 2 \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^2 \beta_k \phi'_k(z_k) \right)$$

Nous nous sommes intéressés à la détermination du champ de contraintes et des déplacements d'une plaque infinie percée d'un trou circulaire soumise à une traction uni forme dans la direction de l'axe x.

LEKHNITSKII [48] donne la transformation suivante:

$$\xi_k = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2(1-\beta_k^2)}}{a(1+\beta_k)}$$

telle que le contour du trou de rayon a , soit représenté par  $\xi_k = e^{i\theta}$

Les solutions  $\phi_k(z_k)$  sont transformées en fonctions  $\phi_k(\xi_k)$  de la forme:

$$\phi_k(\xi_k) = A_k \text{Log}(\xi_k) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \xi_k^{-m}$$

En appliquant les conditions de bord , nous trouvons les valeurs suivantes:

$$A_k = 0$$

$$A_{km} = 0 \text{ si } m > 1$$

$$A_{k1} = -pa / 2(\beta_k - \beta_1) \quad k \neq 1 = 1, 2$$

Finalement , nous déterminons le champ de contraintes par les relations suivantes :

$$\xi_k = X_k + i Y_k$$

$$X_k^{\circ} = a(1+\beta_k) X_k - x$$

$$Y_k^{\circ} = a(1+\beta_k) Y_k - \beta_k y$$

$$D = (X_k^2 + Y_k^2)(X_k^{\circ 2} + Y_k^{\circ 2})$$

$$N_x = p - \sum_{k=1}^2 \frac{pa}{\beta_k - \beta_1} \beta_k^2 \frac{(X_k X_k^{\circ} - Y_k Y_k^{\circ})}{D} \quad (1 \neq k)$$

$$N_y = \sum_{k=1}^2 \frac{pa}{\beta_k - \beta_1} \frac{(X_k X_k^{\circ} - Y_k Y_k^{\circ})}{D}$$

$$N_{xy} = \sum_{k=1}^2 \frac{pa}{\beta_k - \beta_1} \beta_k \frac{(X_k Y_k^{\circ} + X_k^{\circ} Y_k)}{D}$$

En intégrant les relations forces-déplacements, les déplacements sont déterminés:

$$u = \frac{px}{E_x} + \sum_{k=1}^2 \frac{pa}{\beta_k - \beta_1} (\beta_k^2 + v_x^2) \frac{X_k}{X_k^2 + Y_k^2} + \omega y + u_0$$

$$v = \sum_{k=1}^2 \frac{pa}{\beta_k (\beta_k - \beta_1)} (v_x \beta_k^2 + 1) \frac{Y_k}{X_k^2 + Y_k^2} - \omega x + v_0 - \frac{v_y p y}{E_y}$$

Les constantes  $\omega, u_0, v_0$  sont déterminées par les conditions aux limites sur les déplacements; par exemple si la plaque ne peut tourner rigidement et si les axes restent colinéaires durant la déformation, alors

$$\omega = u_0 = v_0 = 0$$

Les relations de base des coques anisotropes cylindriques, chargées symétriquement s'écrivent: STEIN, MAYERS [49]

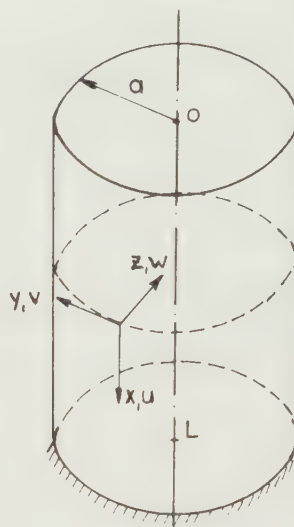
- Relations d'équilibre :

$$\frac{dN_x}{dx} = 0$$

$$\frac{dN_{xy}}{dx} = 0$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

$$Q_y = - \frac{dM_{xy}}{dx}$$



$$\frac{dQ_x}{dx} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{a} N_y + p = 0$$

- Relations forces-déplacements :

$$N_x = \frac{E_x}{1 - \mu'_x \mu'_y} \left( \frac{du}{dx} - \frac{\mu_y}{a} w \right)$$

$$N_y = \frac{E_y}{1 - \mu'_x \mu'_y} \left( - \frac{1}{a} w + \mu'_x \frac{du}{dx} \right)$$

$$N_{xy} = G_{xy} \frac{dv}{dx}$$

$$M_x = - \frac{D_x}{1 - \mu'_x \mu'_y} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{DQ_x} \frac{dQ_x}{dx} \right)$$

$$M_y = \mu_y \cdot M_x$$

$$M_{xy} = - \frac{D_{xy}}{2DQ_y} \frac{dQ_y}{dx}$$

Dans le cas d'un bord libre pour  $x = 0$  et d'un encastrement pour  $x = L$  ces équations donnent :

$$N_x = 0 \quad M_{xy} = 0$$

$$N_{xy} = 0 \quad Q_y = 0$$

$$v = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\mu' y}{a} w$$

$$N_y = - \frac{E y}{a} w$$

La combinaison des équations précédentes conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{E_y}{a^2 DQ_x} \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E_y}{a^2} w = p$$

$$\text{avec : } A = \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \quad C = \frac{E_y}{a^2} \quad B = \frac{AC}{DQ_x}$$

L'équation caractéristique

$$Ar^4 + Br^2 + Cr = 0$$

dont le discriminant,  $\Delta = B^2 - 4AC$ , est négatif, admet pour solution

$$r_1 = \lambda + j \cdot \mu$$

$$r_2 = -\lambda - j \cdot \mu$$

$$r_3 = \lambda - j \cdot \mu$$

$$r_4 = -\lambda + j \cdot \mu$$

La solution de l'équation différentielle en  $w$  est alors

$$W = e^{\lambda x} (A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x) + e^{-\lambda x} (A_3 \cos \mu x + A_4 \sin \mu x) + \frac{P}{C}$$

$$M_x = -A \{ e^{\lambda x} \left[ (\lambda^2 - \mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x) \right.$$

$$\left. - 2\lambda \mu (A_1 \sin \mu x - A_2 \cos \mu x) \right]$$

$$+ e^{-\lambda x} \left[ (\lambda^2 - \mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_3 \cos \mu x + A_4 \sin \mu x) \right.$$

$$\left. + 2\lambda \mu (A_3 \sin \mu x - A_4 \cos \mu x) \right] \}$$

$$Q_x = -A \{ e^{\lambda x} \left[ \lambda (\lambda^2 - 3\mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x) \right.$$

$$\left. - \mu (3\lambda^2 - \mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_1 \sin \mu x - A_2 \cos \mu x) \right]$$

$$- e^{-\lambda x} \left[ \lambda (\lambda^2 - 3\mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_3 \cos \mu x + A_4 \sin \mu x) \right.$$

$$\left. + \mu (3\lambda^2 - \mu^2 - \frac{C}{DQ_x}) (A_3 \sin \mu x - A_4 \cos \mu x) \right] \}$$

Les constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , et  $A_4$  sont déterminées à partir des conditions aux bords de la coque.

$$\begin{array}{l} \text{— pour } x = 0 \\ \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ Q_x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{— pour } x = L \\ \left| \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{dw}{dx} - \frac{Q_x}{DQ_x} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

SOUS-PROGRAMME DE CALCUL DE LA MATRICE RAIDEUR DE FLEXION.**RAIFL**UTILISATION:**-Entrées:**

Paramètres élastiques:(par COMMON)

DX,DY,DXY,AMUX,AMUY,DQX,DQY.

 $(D_x, D_y, D_{xy}, \mu_x, \mu_y, D_{qx}, D_{qy})$ 

Dimensions de l'élément:(par COMMON)

Cas du triangle(NPN=3)Groupement en quadrangle

X(I),Y(I) avec  $X(1)=Y(1)=0$ 

Cas du rectangle(NPN=4)

A et B

Type de l'élément:(en argument)

NPN

Distribution de pression sur l'élément:

COEF(I) tel que:

 $p(x,y)=COEF(1)+COEF(2) x +COEF(3) y$ 

Choix du développement de w (cas du triangle)

LCAS (identique à l défini §232)

**-Sorties:**

Matrice raideur:

AK(144)

Matrice déformation:

T(108) telle que  $\{\varepsilon\}=[T]\{d\}$  pour le rectangleet 
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{tr.I} \\ \varepsilon_{tr.II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T(I) \\ T(I+54) \end{bmatrix} \{d\}$$

pour le quadrangle

Forces nodales:(appliquées à l'élément isolé)

Q(12)

L'utilisateur pourra également calculer la matrice raideur d'un triangle seul en stoppant les calculs après l'ordre 702 (★) de RAIFL.

```

0001 SUBROUTINE RAIFL(AK,Q,T,COEF,VPN,LCAS)
0002 DIMENSION D(78),F(14),T(103),T2(72),F2(12)
0003 DIMENSION Q(14),AK(144),COEF(3),C(168)
0004 COMMON DX,DY,DXY,AMUX,AMUY,DQX,DQY
0005 COMMON X(4),Y(4),AL,BL
0006 COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0007 IF(VPN=3)700,700,800
0008C
0009C ELEMENTS TRIANGULAIRES
0010C
0011 700 DO 699 I=1,12
0012 699 F0(I)=0.0
0013 DO 703 I=1,144
0014 703 AK(I)=0.0
0015 CALL CONSF
0016 CALL RFC(C,3)
0017 CALL RFD(D,3)
0018 CALL RFF(COEF,F,3)
0019 CALL MOD(LCAS,C,D,F)
0020 CALL RAID(C,D,3)
0021 CALL RFQ(Q,F,C,3)
0022 DO 702 J=1,9
0023 F0(J)=Q(J)
0024 DO 702 I=1,J
0025 IJ=I+J*(J+1)/2
0026 K=I+(J-1)*12
0027 AK(K)=D(IJ)
0028 K=J+(I-1)*12
0029 702 AK(K)=D(IJ)
0030 ★ CALL RFDE(C,T,3,LCAS)
0031 X(2)=X(3)
0032 Y(2)=Y(3)
0033 X(3)=X(4)
0034 Y(3)=Y(4)
0035 CALL RFC(C,3)
0036 CALL RFD(D,3)
0037 CALL RFF(COEF,F,3)
0038 CALL MOD(LCAS,C,D,F)
0039 CALL RAID(C,D,3)
0040 CALL RFQ(Q,F,C,3)
0041 DO 705 J=1,9
0042 IF(J=3)706,706,707
0043 706 J1=J
0044 DO 708 J1=J+3
0045 707 J1=J+3
0046 708 FQ(J1)=FQ(J1)+Q(J)
0047 DO 709 I=1,J
0048 IF(I=3)710,710,711
0049 710 I1=I
0050 DO 712 J1=J+3
0051 711 I1=I+3
0052 712 IJ=I+J*(J-1)/2
0053 K=I1+(J1-1)*12
0054 709 AK(K)=AK(K)+D(IJ)
0055 705 CONTINUE
0056 DO 730 J=1,12
0057 DO 730 I=1,J
0058 IJ=I+(J-1)*12
0059 K=J+(I-1)*12
0060 730 AK(K)=AK(IJ)
0061 CALL RFDE(C,T2,3,LCAS)
0062 DO 855 I=1,54
0063 T(I+54)=T2(I)
0064 DO 850
0065C
0066C ELEMENTS RECTANGULAIRES
0067C
0068 800 DO 801 I=1,4
0069 XYZ=FLOAT(I)
0070 X(I)=(XYZ-1.)*(XYZ-2.)*(5.-XYZ)*(6.-XYZ)*AL/12.
0071 801 Y(I)=(XYZ-1.)*(4.-XYZ)*BL/2.
0072 CALL CONSF
0073 CALL RFC(C,4)
0074 CALL RFD(D,4)
0075 CALL RFF(COEF,F,4)
0076 CALL RAID(C,D,4)
0077 DO 1000J=1,12
0078 DO 1000I=1,J
0079 IJ=I+J*(J-1)/2
0080 K=I+(J-1)*12
0081 AK(K)=D(IJ)
0082 K=J+(I-1)*12
0083 1000 AK(K)=D(IJ)
0084 CALL RFQ(FQ,F,C,4)
0085 CALL RFDE(C,T,4,LCAS)
0086 850 CONTINUE
0087 RETURN
0088 END

```

```

0001      SUBROUTINE CONSF
0002      COMMON DX,DY,DDX,AMUX,AMUY,DQX,DQY
0003      COMMON X(4),Y(4),A,B
0004      COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0005      E44=(1.-X*U*Y*U)
0006      E11=DX*B/E44/A/A/A
0007      E12=X*U*D*Y/E44/A/B
0008      E22=D*Y*A/E44/B/B/B
0009      E33=DDX/2./A/B
0010      E44=B/A*DQX
0011      E55=A/B*DQY
0012      H12=2.*E33+E12
0013      RETURN
0014      END

```

```

0001      SUBROUTINE RFC(C,NPN)
0002      DIMENSION C(168)
0003      COMMON DX,DY,DDX,AMUX,AMUY,DQX,DQY
0004      COMMON X(4),Y(4),A,B
0005      COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0006      N=NPV*3
0007      DO 40 I=1,168
0008 40 C(I)=0.
0009      DO 20 IPN=1,NPV
0010      K=(IPN-1)*3+1
0011      XA=X(IPN)/A
0012      XA2=XA*XA
0013      XA3=XA*XA2
0014      YB=Y(IPN)/B
0015      YB2=YB*YB
0016      YB3=YB*YB2
0017      DO 30 I=1,14
0018      K4=K+(I-1)*4
0019      GJ TJ(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14),I
0020 1 C(K4)=1.
0021      GJ TJ 30
0022 2 C(K4)=XA
0023      C(K4+2)=1./A
0024      GJ TJ 30
0025 3 C(K4)=YB
0026      C(K4+1)=1./B
0027      GJ TJ 30
0028 4 C(K4)=XA2
0029      C(K4+2)=2.*XA/A
0030      GJ TJ 30
0031 5 C(K4)=XA*YB
0032      C(K4+1)=XA/B
0033      C(K4+2)=YB/A
0034      GJ TJ 30
0035 6 C(K4)=YB2
0036      C(K4+1)=2.*YB/B
0037      GJ TJ 30
0038 7 C(K4)=XA3
0039      C(K4+2)=3./A*(XA2+2.*E11/E44)
0040      GJ TJ 30
0041 8 C(K4)=XA2*YB
0042      C(K4+1)=(XA2+2.*H12/E55)/B
0043      C(K4+2)=2.*XA*YB/A
0044      GJ TJ 30
0045 9 C(K4)=XA*YB2
0046      C(K4+1)=2.*XA*YB/B
0047      C(K4+2)=(YB2+2.*H12/E44)/A
0048      GJ TJ 30
0049 10 C(K4)=YB3
0050      C(K4+1)=3./B*(YB2+2.*E22/E55)
0051      GJ TJ 30
0052 11 C(K4)=XA3*YB
0053      C(K4+1)=XA/B*(XA2+6.*H12/E55)
0054      C(K4+2)=YB/A*3.*(XA2+2.*E11/E44)
0055      GJ TJ 30
0056 12 C(K4)=XA*YB3
0057      C(K4+1)=3.*XA/B*(YB2+2.*E22/E55)
0058      C(K4+2)=YB/A*(YB2+6.*H12/E44)
0059      GJ TJ 30
0060 13 C(K4)=XA2*(XA2-3.*YB2*E11/H12)
0061      C(K4+1)=-3.*YB/B*E11/H12*(2.*XA2+4.*H12/E55)
0062      C(K4+2)=XA/A*(4.*XA2+12.*E11/E44-6.*YB2*E11/H12)
0063      GJ TJ 30
0064 14 C(K4)=YB2*(YB2-3.*E22/H12*XA2)
0065      C(K4+1)=YB/B*(4.*YB2+12.*E22/E55-6.*E22*XA2/H12)
0066      C(K4+2)=-XA/A*3.*E22/H12*(2.*YB2+4.*H12/E44)
0067 30 CONTINUE
0068 20 CONTINUE
0069      RETURN
0070      END

```

```

0001 SUBROUTINE RFD(D,NPN)
0002 DIMENSION D(66)
0003 COMMON DX,DY,DOXY,AMUX,AMUY,DOX,DOY
0004 COMMON X(4),Y(4),A,B
0005 COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0006 DO 10 I=1,66
0007 10 D(I)=0.
0008 S00=4.*S(0,0,NPN)
0009 S01=4.*S(0,1,NPN)
0010 S10=4.*S(1,0,NPN)
0011 S11=4.*S(1,1,NPN)
0012 S20=4.*S(2,0,NPN)
0013 S02=4.*S(0,2,NPN)
0014 S12=4.*S(1,2,NPN)
0015 S21=4.*S(2,1,NPN)
0016 S30=4.*S(3,0,NPN)
0017 S03=4.*S(0,3,NPN)
0018 S22=4.*S(2,2,NPN)
0019 S40=4.*S(4,0,NPN)
0020 S04=4.*S(0,4,NPN)
0021 S13=4.*S(1,3,NPN)
0022 S31=4.*S(3,1,NPN)
0023 E112=E11/H12
0024 H124=H12/E44
0025 H125=H12/E55
0026 E212=E22/H12
0027 E125=E12/E55
0028 E124=E12/E44
0029 E122=E12/H12
0030 E225=E22/E55
0031 E312=4.*E33+E12
0032 E312H=E312/H12
0033 E332=E33/H12
0034 E14=E11/E44
0035 EH=E14+H125
0036 HE=E225+H124
0037 EE=2.*E12-E11*E212
0038 E312H=4.*E33-E12
0039 E31H4=E312H/H12
0040 EF2=E14/E44-2.*E124/E55+E225/E55
0041 E412=3.*E33+E12
0042 D(1)=S00*E11
0043 D(3)=S00*E33
0044 D(4)=S00*E12
0045 D(5)=S00*E22
0046 D(7)=3.*E11*S10
0047 D(9)=3.*E12*S10
0048 D(10)=9.*E11*(S20+E14*S00)
0049 D(11)=E11*S01
0050 D(12)=2.*E33*S10
0051 D(13)=E12*S01
0052 D(14)=E11*S11*3.
0053 D(15)=E11*S02+4.*E33*S20+H12*H125*S00
0054 D(16)=E12*S10
0055 D(17)=2.*E33*S01
0056 D(18)=E22*S10
0057 D(19)=3.*(E12*S20+E14*H12*S00)
0058 D(20)=E312*S11
0059 D(21)=4.*E33*S02+E22*S20+H124*H12*S00
0060 D(22)=3.*E12*S01
0061 D(24)=3.*E22*S01
0062 D(25)=9.*E12*S11
0063 D(26)=3.*(E12*S02+E22*H125*S00)
0064 D(27)=3.*E22*S11
0065 D(28)=9.*E22*(S02+E225*S00)
0066 D(29)=3.*E11*S11
0067 D(30)=3.*E33*(S20+(E14+H125)*S00)
0068 D(31)=D(25)/3.
0069 D(32)=9.*E11*(S21+E14*S01)
0070 D(33)=3.*(E11*S12+2.*E33*(S30+E14*S10)+H125*S10*E312)
0071 D(34)=3.*(H12*S21+S01*(E14*E312+2.*E33*H125))
0072 D(35)=9.*(E12*S12+H125*E22*S10)
0073 D(36)=9.*(E11*S22+E33*S40+S20*(H125*E312+2.*E33*E14)+E11*E14*S02+
0074 1EH*EH+E33*S00)
0075 D(37)=3.*E12*S11
0076 D(38)=3.*E33*(S02+HE*S00)
0077 D(39)=3.*E22*S11
0078 D(40)=9.*(E12*S21+E11*H124*S01)
0079 D(41)=3.*(H12*S12+E225*E312*S10+2.*E33*H124*S10)
0080 D(42)=3.*(2.*E33*S03+E22*S21+H124*E312*S01+2.*E33*E225*S01)
0081 D(43)=9.*E22*(S12+E225*S10)
0082 D(44)=9.*(E12+E33)*S22+(E33*HE+E22*H125)*S20+(E33*EH+E11*H124)*
0083 1S02+E33*EH*HE*S00)
0084 D(45)=9.*(E33*S04+E22*S22+S02*(2.*E33*E225+H124*E312)+S20*E225+E22
0085 1+E33*HE*HE*S00)
0086 D(46)=3.*E11*(E312H*S20-E112*S02+2.*(E14-E125)*S00)
0087 D(47)=-12.*E11*E332*S11
0088 D(48)=3.*(EE*S20-E112*E12*S02+2.*E11*(E124-E225)*S00)
0089 D(49)=9.*E11*(E312H*S30-E112*S12+2.*(2.*E14-E125)*S10)
0090 D(50)=-3.*E11*(E112*S03+E31H4*S21+2.*(-E14+E125+H125)*S01)
0091 D(51)=3.*(EE*S30-E112*(B.*E33+E12)*S12+2.*(E124+H124-E225)*E11*S10
0092 1)

```

```

0093      D(52)=9.*(-E112*E12*S03+EE*S21+2.*E11*(E124+2.*E225)*S01)
0094      D(53)=9.*E11*(-E112*S13+E122*S31+(4.*E14*(E332+E122)-4.*H125)*
0095      1S11)
0096      D(54)=9.*(EE*S31-E11*E312H*S13+4.*E14*E12*S11-4.*E112*E225*(E33+
0097      1H12)*S11)
0098      D(55)=9.*E11*((8.*E332+E112*E12)*S04+2.*E112*E314H*S22+E112*E112*
0099      1S04+4.*(2.*E14*(1.+E332)-EE/E55)*S20+4.*(E112*(H125+E125)-E14*E112
0100      2)*S02+4.*EE2*E11*S00)
0101      D(56)=3.*(S02*EE-E12*E212*S20+2.*E22*(E125-E14)*S00)
0102      D(57)=-12.*E33*E212*S11
0103      D(58)=3.*E22*(-E212*S20+E3124*S02+2.*(E225-E124)*S00)
0104      D(59)=9.*(EE*S12-E212*E12*S30-2.*E22*S10*(2.*E14-E125))
0105      D(60)=3.*(EE*S03-E412*E212*S21+2.*E22*S01*(-E14+H125+E125))
0106      D(61)=-3.*E22*(E212*S30+E314H*S12+2.*(E124+H124-E225)*S10)
0107      D(62)=9.*E22*(E312H*S03-E212*S21+2.*(2.*E225-E124)*S01)
0108      D(63)=9.*(EE*S13-E212*S31+E312-4.*S11*E22*(E14*(1.0+E332)-E125))
0109      D(64)=9.*E22*(E122*S13-E212*S31+4.*S11*(-H124+E225*(E332+E122)))
0110      D(65)=9.*(-E212*EE*S04+E112*EE*S04+(2.*EE+12.*E112*E212*E33)*S22-
0111      14.*E22*(2.*E14-E125)*S20-4.*E11*(2.*E225-E124)*S02-4.*E11*E22*EE2*
0112      VSD0)
0113      D(66)=9.*E22*((8.*E332+E112*E12)*S04+2.*E212*E314H*S22+E212*E212*
0114      1S04+4.*(2.*E225*(1.+E332)-EE/E44)*S02+4.*(E212*(H124+E124)-E225*E2
0115      212)*S20+4.*EE2*E22*S00)
0116      RETURN
0117      END

```

```

0001      SUBROUTINE RFF(CDEF,F,VPV)
0002      DIMENSION FK(21),GK(15),F(14),CDEF(3)
0003      COMMON DX,DY,DXY,AMUX,AMUY,D2X,D2Y
0004      COMMON X(4),Y(4),A,B
0005      COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0006      CDEF(2)=CDEF(2)*A
0007      CDEF(3)=CDEF(3)*B
0008      DO 5 I=1,3
0009      5 CDEF(I)=CDEF(I)*A*B
0010      K=0
0011      DO 10 I=1,6
0012      DO 10 L=1,I
0013      K=K+1
0014      K1=I-L
0015      K2=L-1
0016      FK(K)=S(K1,K2,VPV)
0017      10 CONTINUE
0018      K=0
0019      DO 20 I=1,5
0020      DO 20 L=1,I
0021      K=K+1
0022      K1=K+I
0023      GK(K)=FK(K)*CDEF(1)+FK(K1)*CDEF(2)+FK(K1+1)*CDEF(3)
0024      20 CONTINUE
0025      DO 30 I=1,10
0026      30 F(I)=GK(I)
0027      F(11)=GK(12)
0028      F(12)=GK(14)
0029      F(13)=GK(11)-3.*E11/H12*GK(13)
0030      F(14)=GK(15)-3.*E22/H12*GK(13)
0031      CDEF(2)=CDEF(2)/A
0032      CDEF(3)=CDEF(3)/B
0033      DO 40 I=1,3
0034      40 CDEF(I)=CDEF(I)/A/B
0035      RETURN
0036      END

```

```

0001      SUBROUTINE RFQ(Q,F,C,VPV)
0002      DIMENSION C(168),F(14),Q(14)
0003      N=3*VPV
0004      DO 30 I=1,N
0005      Q(I)=0.0
0006      DO 30 J=1,14
0007      IJ=J+(I-1)*14
0008      30 Q(I)=Q(I)+C(IJ)*F(J)
0009      RETURN
0010      END

```

```

0001      SUBROUTINE MOD(LT,C,D,F)
0002      DIMENSION D(78),C(168),F(14),G(168),IG(16)
0003      GOTO(150,300,400,500,700),LT
0004 150 EPS=+.10
0005      DO 10 I=1,9
0006 10 G(I)=C(I+63)
0007      DO 20 I=1,9
0008      C(I+63)=G(I)+C(I+72)/EPS
0009      C(I+72)=C(I+81)
0010 20 C(I+81)=2.*G(I)-C(I+63)
0011      DO 21 I=1,6
0012      G(I)=D(I+15)
0013      K=5+(I+5)*(I+4)/2
0014 21 G(I+5)=D(K)
0015      G(12)=D(26)
0016      DO 22 I=1,4
0017      D(I+10)=D(I+10)+G(I)*EPS
0018      D(I+15)=D(I+21)
0019      D(I+21)=D(I+10)-2.*G(I)*EPS
0020      K=(I+7)*(I+6)/2+5
0021      D(K)=D(K)+G(I+7)*EPS
0022      D(K+1)=D(K+2)
0023 22 D(K+2)=D(K)-2.*G(I+7)*EPS
0024      D(15)=D(15)+2.*G(5)*EPS+G(5)
0025      D(20)=G(12)+G(7)*EPS
0026      D(26)=D(15)-2.*G(6)-2.*G(5)*EPS
0027      D(27)=G(12)-G(7)*EPS
0028      D(21)=D(28)
0029      D(28)=D(15)-4.*G(5)*EPS
0030      G(1)=F(9)
0031      F(8)=F(8)+G(1)*EPS
0032      F(9)=F(10)
0033      F(10)=F(8)-2.*G(1)*EPS
0034      GOTO 700
0035 300 DO 30 I=1,5
0036 30 IG(I+5)=I+4
0037      IG(5)=10
0038      GO TO 250
0039 400 DO 40 I=1,3
0040 40 IG(I+4)=I+4
0041      IG(9)=8
0042      IG(10)=9
0043      IG(8)=10
0044      GO TO 250
0045 500 DO 50 I=1,4
0046 50 IG(I+4)=I+4
0047      IG(10)=9
0048      IG(9)=10
0049 250 DO 60 I=1,4
0050      IG(I)=I
0051 60 IG(I+10)=I+10
0052      DO 61 I=1,168
0053 61 G(I)=0.0
0054      DO 62 I=1,9
0055      DO 62 K=1,14
0056      IJ=I+(IG(K)-1)*9
0057      IK=I+(K-1)*9
0058 62 G(IJ)=G(IJ)+C(IK)
0059      DO 63 I=1,168
0060 63 C(I)=G(I)
0061      DO 64 I=1,121
0062 64 G(I)=0.0
0063      DO 65 L=4,14
0064      DO 65 K=4,14
0065      IF(L-K)66,66,67
0066 66 IK=L+(K-3)*(K-4)/2-3
0067      GO TO 68
0068 67 IK=K+(L-3)*(L-4)/2-3
0069 68 IJ=IG(L)-3*(IG(K)-4)*11
0070 65 G(IJ)=G(IJ)+D(IK)
0071      DO 69 J=1,11
0072      DO 69 I=1,J
0073      IJ=I+(J-1)*11
0074      K=I+J*(J-1)/2
0075 69 D(K)=G(IJ)
0076      DO 70 I=1,14
0077      G(I)=F(I)
0078 70 F(I)=0.0
0079      DO 71 K=1,14
0080      I=IG(K)
0081 71 F(I)=G(K)
0082 700 CONTINUE
0083      RETURN
0084      END

```

```

0001      SUBROUTINE MODT(LT,T)
0002      DIMENSION T(66),G(66),IG(16)
0003      GOTD(150,300,400,500,700),LT
0004      EPS=+1.0
0005      GOTD(150,150,300,400,500,700),LT
0006      EPS=-7.*FLOAT(LT)+3.
0007      DO 10 I=1,6
0008      G(I)=T(I+24)
0009      T(I+24)=G(I)+T(I+30)*EPS
0010      T(I+30)=T(I+36)
0011      10 T(I+36)=2.*G(I)-T(I+24)
0012      GO TO 700
0013      300 DO 30 I=1,5
0014      30 IG(I+5)=I+4
0015      IR(5)=10
0016      GO TO 250
0017      400 DO 40 I=1,3
0018      40 IR(I+4)=I+4
0019      IG(9)=9
0020      IR(10)=9
0021      IG(8)=10
0022      GO TO 250
0023      500 DO 50 I=1,4
0024      50 IR(I+4)=I+4
0025      IG(10)=9
0026      IR(9)=10
0027      250 DO 60 I=1,4
0028      IR(I)=I
0029      60 IR(I+10)=I+10
0030      GO 61 I=1,66
0031      G(I)=T(I)
0032      61 T(I)=0.0
0033      DO 62 I=1,6
0034      DO 62 K=1,11
0035      IJ=I+(K-1)*6
0036      IK=I+(IG(K+3)-4)*6
0037      62 T(IJ)=T(IJ)+G(IK)
0038      700 RETURN
0039      END

```

```

0001      SUBROUTINE RAID(C,D,NPN)
0002      DIMENSION C(168),D(78),E(144),LX(12),MX(12),F(144)
0003      N=3*NPN
0004      CALL MRAINV(C,C,N,KDD,DET,+0.1E-10,LX,MX)
0005      I=V*N
0006      DO 11 J=1,I
0007      11 E(J)=0.0
0008      DO 12 I=4,N
0009      DO 12 J=1,N
0010      IJ=I+(J-1)*N
0011      DO 13 K=4,N
0012      IF(I-K)14,15,15
0013      14 IK=I-3+(K-4)*(K-3)/2
0014      GO TO 15
0015      15 IK=K-3+(I-4)*(I-3)/2
0016      16 KJ=K+(J-1)*N
0017      E(IJ)=E(IJ)+D(IK)*C(KJ)
0018      13 CONTINUE
0019      12 CONTINUE
0020      DO 17 J=1,N
0021      DO 17 I=1,J
0022      IJ=I+J*(J-1)/2
0023      F(IJ)=0.0
0024      DO 18 K=4,N
0025      IK=K+(I-1)*N
0026      KJ=K+(J-1)*N
0027      18 F(IJ)=F(IJ)+C(IK)*E(KJ)
0028      17 CONTINUE
0029      J=V*(V+1)/2
0030      DO 102 I=1,J
0031      102 D(I)=F(I)
0032      M=0
0033      I=V*N
0034      DO 96 J=1,I
0035      96 E(J)=C(J)
0036      DO 81 J=1,N
0037      DO 82 I=1,N
0038      IJ=I+(J-1)*14
0039      IK=I+(J-1)*N
0040      82 C(IJ)=E(IK)
0041      81 CONTINUE
0042      IF(M+V-14)85,90,90
0043      85 M=M+V+1
0044      DO 86 J=1,N
0045      DO 86 I=4,14
0046      IJ=I+(J-1)*14
0047      86 C(IJ)=0.0
0048      90 RETURN
0049      END

```

```

0001 SUBROUTINE RFOE(C,A,NPV,LT)
0002 DIMENSION C(168),T(66),A(72)
0003 COMMON DX,DY,DXY,AMJX,AMJY,D2X,D2Y
0004 COMMON X(6),Y(6),AL,BL
0005 COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0006 N=3*NPV
0007 CALL RFT(T,NPV)
0008 IF(NPV=3)1000,1000,1001
0009 1000 CALL MODT(LT,T)
0010 1001 CONTINUE
0011 IF(NPV=3)1,1,2
0012 2 M=12
0013 GO TO 20
0014 1 M=9
0015 20 DO 30 I=1,6
0016 DO 30 J=1,4
0017 IJ=I+(J-1)*6
0018 A(IJ)=0.0
0019 DO 30 K=6,4
0020 IK=I+(K-6)*6
0021 KJ=K+(J-1)*14
0022 A(IJ)=A(IJ)+T(IK)*C(KJ)
0023 30 CONTINUE
0024 RETURN
0025 END

0001 SUBROUTINE RFT(T,NPV)
0002 DIMENSION T(66)
0003 COMMON DX,DY,DXY,AMJX,AMJY,D2X,D2Y
0004 COMMON X(6),Y(6),A,B
0005 COMMON E11,E12,E22,E33,E44,E55,H12
0006 IF(NPV=3)30,20,30
0007 20 XX=(X(2)+X(3))/3./A
0008 YY=(Y(2)+Y(3))/3./B
0009 GO TO 10
0010 30 XX=0.5
0011 YY=0.5
0012 10 DO 41 I=1,66
0013 41 T(I)=0.0
0014 A2=A*A
0015 AB=A*B
0016 B2=B*B
0017 E114=E11/E44
0018 H125=H12/E55
0019 H124=H12/E44
0020 E225=E22/E55
0021 E112=E11/H12
0022 E115=E11/E55
0023 E222=E22/H12
0024 E224=E22/E44
0025 T(1)=2./A2
0026 T(8)=1./AB
0027 T(9)=T(8)
0028 T(16)=2./B2
0029 T(19)=6.*XX/A2
0030 T(23)=-6.*E114/A
0031 T(25)=7.*YY/A2
0032 T(26)=2.*XX/AB
0033 T(27)=T(26)
0034 T(30)=-2.*H125/B
0035 T(32)=2.*YY/AB
0036 T(33)=T(32)
0037 T(34)=2.*XX/B2
0038 T(35)=-2.*H124/A
0039 T(40)=6.*YY/B2
0040 T(42)=-6.*E225/B
0041 T(43)=6.*XX*YY/A2
0042 T(44)=3./AB*(XX*XX+2.*E114)
0043 T(45)=3./AB*(XX*XX+2.*H125)
0044 T(47)=-6.*E114*YY/A
0045 T(48)=-6.*H125*XX/B
0046 T(50)=3./AB*(YY*YY+2.*H124)
0047 T(51)=3./AB*(YY*YY+2.*E225)
0048 T(52)=6.*XX*YY/B2
0049 T(53)=-6.*H124*YY/A
0050 T(54)=-6.*E225*XX/B
0051 T(55)=6./A2*(2.*XX*XX+2.*E114-E112*YY*YY)
0052 T(56)=-12.*E112*XX*YY/AB
0053 T(57)=T(56)
0054 T(58)=-6.*E112/B2*(XX*XX+2.*H125)
0055 T(59)=-12.*E114*XX/A
0056 T(60)=12.*E115*YY/B
0057 T(61)=-6.*E222/A2*(YY*YY+2.*H124)
0058 T(62)=-12.*E222*XX*YY/AB
0059 T(63)=T(62)
0060 T(64)=6./B2*(2.*YY*YY+2.*E225-E222*XX*XX)
0061 T(65)=12.*E224*XX/A
0062 T(66)=-12.*E225*YY/B
0063 RETURN
0064 END

```

```

0001      FUNCTION S(IP, IQ, VP)
0002      COMMON X, DY, DXY, AMUX, AMUY, D2X, D2Y
0003      COMMON X(4), Y(4), A, B
0004      COMMON E11, E12, E22, E33, E44, E55, M12
0005      MP=IP+1
0006      MQ=IQ+1
0007      S=0.0
0008      IF(VP-3)10,30,20
0009 20 S=1.0/(FLOAT(MP)*FLOAT(MQ))
0010 10 RETURN
0011 30 X2=X(2)/A
0012      X3=X(3)/A
0013      Y2=Y(2)/B
0014      Y3=Y(3)/B
0015      DO 40 M=1, MP
0016      M1=MP-M
0017      M2=M-1
0018      Z=PJIS(X2, M1)*PJIS(X3, M2)/FACT(M2)/FACT(M1)
0019      DO 40 M=1, MQ
0020      M1=MQ-M
0021      M2=M-1
0022      M3=MP+MQ-M-M
0023      Z7=FACT(M3)
0024      M3=M+M-2
0025      Z7=Z7*FACT(M3)
0026      S=S+Z*PJIS(Y2, M1)*PJIS(Y3, M2)/FACT(M2)/FACT(M1)*Z7
0027 40 CONTINUE
0028      M3=MP+MQ
0029      S=S*FACT(IQ)*FACT(IP)*(X3*Y2-X2*Y3)/FACT(M3)
0030      RETURN
0031      END
0032      FUNCTION FACT(V)
0033      FACT=1.0
0034      IF(V-1)10,10,20
0035 10 RETURN
0036 20 K=0
0037 30 K=K+1
0038      FACT=FACT*FLOAT(K)
0039      IF(K-V)30,10,10
0040      END
0041      FUNCTION PJIS(X, V)
0042      Y=1.0
0043      IF(V)10,20,30
0044 10 M=-V
0045      GO TO 31
0046 20 PJIS=Y
0047      RETURN
0048 30 M=V
0049 31 IF(X)32,33,32
0050 32 DO 40 I=1, M
0051      Y=Y*X
0052 40 CONTINUE
0053 33 IF(M+V)41,41,20
0054 41 Y=1.0/Y
0055      GO TO 20
0056 33 Y=0.1E-34
0057      GO TO 35
0058      END

```

```

C      1      C
C      2      SUBROUTINE PRINV(A,B,I,KOD,DET,LPS,IL,IC)
C      3      DIMENSION A(1),B(1),IL(1),IC(1)
C      4      C
C      5      1. A: TABLEAU DANS LEQUEL ON RANGE LA MATRICE INITIALE EN
C      6      2 COLONNES. LA MATRICE A N'EST PAS DETRUITE SI A ET B N'ONT PAS
C      7      2 LA MEME INFLANTATION EN MEMOIRE. SI N EST LA DIMENSION DE LA
C      8      3 MATRICE, LA DIMENSION DE CE TABLEAU EST NN.
C      9      2. B: TABLEAU CONTENANT LA MATRICE INVERSE DE A. SI L'ON NE
C      10     3 DESIRE PAS GARDER LA MATRICE INITIALE EN MEMOIRE, ON PEUT
C      11     4 ECRIRE CALL PRINVA(A,N,KOD,DET,LPS,IL,IC) POUR AVOIR LE RESULTAT
C      12     5 RANGE DANS A.
C      13     3. N: DIMENSION DE LA MATRICE A ET DE SON INVERSE B.
C      14     4. DET: VALEUR DU DETERMINANT DE LA MATRICE A.
C      15     5. KOD: CODE D'ERREUR.
C      16     1. KOD = 0 : SOLUTION NORMALE
C      17     2. KOD = 1 : MATRICE SINGULIERE
C      18     3. LPS: SEUL AU-DESSUS DUQUEL UN PIVOT EST CONSIDERE COMME
C      19     4 PIVOT.
C      20     7. IL: TABLEAU DE TRAVAIL DE DIMENSION N A RESERVER DANS LE
C      21     8 PROGRAMME APPELANT.
C      22     9. IC: TABLEAU DE TRAVAIL DE DIMENSION N A RESERVER DANS LE
C      23     10 PROGRAMME APPELANT.
C      24     C
C      25     KOD=0
C      26     NN=N*N
C      27     DO 1 I=1, NN
C      28     B(I)=A(I)
C      29     C      RECHERCHE DE PIVOT MAXIMUM
C      30     DET=1.
C      31     NN=-1.
C      32     DO 41 I=1, N

```

```

34      IL(M)=M
35      IC(M)=M
36      ID=NM+M
37      PIVO=B(ID)
38      DO 2 J=M,N
39      JJ=J*N-N
40      DO 2 I=M,N
41      II=JJ+I
42      IF(ABS(PIVO).GE. ABS(B(II))) GOTO 2
43      PIVO=B(II)
44      IL(M)=I
45      IC(M)=J
46      2 CONTINUE
C      47      C PERMUTATIONS LIGNES ET COLONNES
48      I=IL(M)
49      IF(I.LE.M) GOTO 4
50      IM=M-N
51      DO 3 J=1,N
52      IM=IM+N
53      JJ=IM-M+I
54      X=-B(IM)
55      B(IM)=B(JJ)
56      3 B(JJ)=X
57      4 J=IC(M)
58      IF(J.LE.M) GOTO 6
59      NJ=N+J-N
60      DO 5 I=1,N
61      JM=NM+I
62      JJ=NJ+I
63      X=-B(JM)
64      B(JM)=B(JJ)
65      5 B(JJ)=X
C      66      C MODIFICATION EN COLONNE
67      6 IF(ABS(PIVO).GT.EPS) GOTO 7
68      DET=0.
69      KOD=1
70      RETURN
71      7 DO 8 L=1,N
72      IF(L.EQ.M) GOTO 8
73      LL=NM+L
74      B(LL)=-B(LL)/PIVO
75      8 CONTINUE
C      76      C ALGORITHME DE GAUSS
77      DO 9 I=1,N
78      IM=NM+I
79      II=I-M
80      DO 9 J=1,N
81      II=II+N
82      IF(I.EQ.M) GOTO 9
83      IF(J.EQ.M) GOTO 9
84      JJ=II-I+M
85      B(II)=B(II)+B(IM)*B(JJ)
86      9 CONTINUE
C      87      C MODIFICATION EN LIGNE
88      MJ=M-N
89      DO 10 J=1,N
90      MJ=MJ+N
91      IF(J.EQ.M) GOTO 10
92      B(MJ)=B(MJ)/PIVO
93      10 CONTINUE
C      94      C CALCUL DU DETERMINANT
95      DET=DET*PIVO
C      96      C MODIFICATION DU PIVOT
97      B(ID)=1./PIVO
98      11 CONTINUE
C      99      C PERMUTATIONS SUR LA MATRICE RESULTANTE
100     M=M
101     12 M=M-1
102     IF(M.LE.0) GOTO 16
103     I=IL(M)
104     IF(I.LE.M) GOTO 14
105     J1=N*(M-1)
106     J2=N*(I-1)
107     DO 13 J=1,N
108     JX=J1+J
109     JY=J2+J
110     X=B(JX)
111     B(JX)=-B(JY)
112     13 B(JY)=X
113     14 J=IC(M)
114     IF(J.LE.M) GOTO 12
115     J1=M-N
116     DO 15 I=1,N
117     J1=J1+N
118     J2=J1-M+J
119     X=B(J1)
120     B(J1)=-B(J2)
121     15 B(J2)=X
122     GOTO 12
123     16 CONTINUE
124     RETURN
125     END

```

SOUS-PROGRAMME DE CALCUL DE LA MATRICE RAIDEUR D'EXTENSION.

**RAIPL**

UTILISATION:

-Entrées:

Paramètres élastiques:(par COMMON)

EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY.

( $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_x, \nu_y$ )

Dimensions de l'élément:(par COMMON)

Cas du triangle(NPN=3)

X(I),Y(I) avec  $X(1)=Y(1)=0$

Cas du rectangle(NPN=4)

A et B

Type de l'élément:(en argument)

NPN

-Sorties:

Matrice raideur:

AK(64)

Matrice déformation:

T(36) telle que:  $\{\epsilon\} = [T]\{d\}$  pour le rectangle

et  $\begin{Bmatrix} \epsilon_{tr,I} \\ \epsilon_{tr,II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T(I) \\ T(I+18) \end{bmatrix} \{d\}$  pour le quadrangle

L'utilisateur pourra obtenir la matrice raideur du triangle seul à l'aide du sous-programme KPKT(AK).

```

0001 SUBROUTINE RAIPL(AK,T,NPN)
0002 DIMENSION AK(64),C(6)
0003 COMMON AK,EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY
0004 DIMENSION X(6),Y(4),A,B
0005 IF(NPN=3) GO TO 20,20,10
0006 10 CONTINUE
0007 CALL KPKR(AK)
0008 XX=A/2.0
0009 YY=B/2.0
0010 CALL TKPR(T,XX,YY)
0011 RETURN
0012 20 DO 30 I=1,64
0013 30 AK(I)=0.0
0014 CALL KPKT(C)
0015 DO 40 I=1,6
0016 DO 40 J=1,6
0017 IJ=I+(J-1)*6
0018 K=I+(J-1)*8
0019 40 AK(K)=C(IJ)
0020 CALL TKPT(T)
0021 X(2)=X(3)
0022 Y(2)=Y(3)
0023 X(3)=X(4)
0024 Y(3)=Y(4)
0025 CALL KPT(C)
0026 DO 50 J=1,6
0027 IF(J=2) 51,51,52
0028 51 J1=J
0029 GO TO 53
0030 52 J1=J+2
0031 53 DO 50 I=1,6
0032 IF(I=2) 54,54,55
0033 54 I1=I
0034 GO TO 56
0035 55 I1=I+2
0036 56 IJ=I1+(J1-1)*6
0037 K=I1+(J1-1)*8
0038 50 AK(K)=AK(K)+C(IJ)
0039 CALL KPT(C)
0040 DO 50 I=1,18
0041 50 T(I+18)=C(I)
0042 RETURN

```

```

0001 SUBROUTINE KPKR(AK)
0002 DIMENSION AK(66)
0003 COMMON EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY
0004 COMMON X(4),Y(4),A,B
0005 R=2.0*GXY*(1.0-AMJPX*AMJPY)+AMJPX*EY+AMJPY*EX
0006 R=R/(4.0*(1.0-AMJPX*AMJPY)*GXY)
0007 R21=R+R+1.
0008 R22=2.*R-2.*R-1.
0009 AX=EX/(1.-AMJPX*AMJPY)
0010 AY=EY/(1.-AMJPX*AMJPY)
0011 AXY=(AMJPX*EY+AMJPY*EX)/((1.-AMJPX*AMJPY)*2.)
0012 AK(1)=AX*B/3./A+GXY*A*R21/3./B
0013 AK(2)=AXY/4.+GXY/4.
0014 AK(3)=AX*B/6./A-GXY*A*R21/3./B
0015 AK(4)=GXY/4.-AXY/4.
0016 AK(5)=-AX*B/6./A+GXY*A/6./B*R22
0017 AK(6)=-AK(2)
0018 AK(7)=-AX*B/3./A-GXY*A/6./B*R22
0019 AK(8)=-AK(4)
0020 AK(10)=AY*A/3./B+GXY*B/3./A*R21
0021 AK(11)=-AK(4)
0022 AK(12)=-AY*A/3./B-GXY*B/6./A*R22
0023 AK(13)=-AK(2)
0024 AK(14)=-AY*A/6./B+GXY*B/6./A*R22
0025 AK(15)=AK(4)
0026 AK(16)=AY*A/6./B-GXY*B/3./A*R21
0027 AK(19)=AK(1)
0028 AK(20)=-AK(2)
0029 AK(21)=AK(7)
0030 AK(22)=AK(4)
0031 AK(23)=AK(5)
0032 AK(24)=AK(2)
0033 AK(28)=AK(10)
0034 AK(29)=-AK(4)
0035 AK(30)=AK(16)
0036 AK(31)=AK(2)
0037 AK(32)=AK(14)
0038 AK(37)=AK(1)
0039 AK(38)=AK(2)
0040 AK(39)=AK(3)
0041 AK(40)=AK(4)
0042 AK(46)=AK(10)
0043 AK(47)=-AK(4)
0044 AK(48)=AK(12)
0045 AK(55)=AK(1)
0046 AK(56)=-AK(2)
0047 AK(64)=AK(10)
0048 DO 10 J=2,8
0049 DO 10 I=1,J
0050 IJ=I+(J-1)*8
0051 JI=J+(I-1)*8
0052 10 AK(IJ)=AK(JI)
0053 RETURN
0054 END

```

```

0001 SUBROUTINE TKPR(T,XX,YY)
0002 DIMENSION T(24)
0003 COMMON EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY
0004 COMMON X(4),Y(4),A,B
0005 ET=XX/A
0006 PS=YY/B
0007 DO 10 I=1,24
0008 10 T(I)=0.0
0009 T(1)=PS-1.0
0010 T(7)=-PS
0011 T(13)=PS
0012 T(19)=1.0-PS
0013 DO 20 I=1,7,2
0014 J=1+(I-1)*3
0015 20 T(J)=T(J)/A
0016 T(5)=ET-1.0
0017 T(11)=1.0-ET
0018 T(17)=ET
0019 T(23)=-ET
0020 DO 30 I=2,8,2
0021 J=2+(I-1)*3
0022 30 T(J)=T(J)/B
0023 R=2.0*GXY*(1.0-AMJPX*AMJPY)+AMJPX*EY+AMJPY*EX
0024 R=R/(4.0*(1.0-AMJPX*AMJPY)*GXY)
0025 AZ=(R+ET*(1.0-2.0*R))/B
0026 BN=(R+PS*(1.0-2.0*R))/A
0027 AB=AZ-1.0/B
0028 BB=BN-1.0/A
0029 T(3)=AB
0030 T(6)=BB
0031 T(9)=-AB
0032 T(12)=-BN
0033 T(15)=AZ
0034 T(18)=BN
0035 T(21)=-AZ
0036 T(24)=-BB
0037 RETURN
0038 END

```

```

0001      SUBROUTINE KPKT(AK)
0002      DIMENSION AK(36)
0003      COMMON EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY
0004      COMMON X(4),Y(4),A,B
0005      AX=EX/(1.+AMUPX*AMUPY)
0006      AY=EY/(1.+AMUPX*AMUPY)
0007      AXY=(AMUPX*EY +AMUPY*EX)/((1.+AMUPX*AMUPY)*2.)
0008      X32=X(3)-X(2)
0009      Y32=Y(3)-Y(2)
0010      X23=-X32
0011      Y23=-Y32
0012      S=X(3)*Y(2)-X(2)*Y(3)
0013      AK(1)=AX*Y32+Y32+GXY*X32*X32
0014      AK(7)=(AXY+GXY)*X32*Y23
0015      AK(9)=AY*X23*X23+GXY*Y23*Y23
0016      AK(13)=AX*Y(3)*Y23+GXY*X(3)*X23
0017      AK(14)=AXY*X32*Y(3)+GXY*X(3)*Y32
0018      AK(15)=AX*Y(3)*Y(3)+GXY*X(3)*X(3)
0019      AK(19)=AXY*X(3)*Y32+GXY*Y(3)*X32
0020      AK(20)=AY*X(3)*X23+GXY*Y(3)*Y23
0021      AK(21)=-X(3)*Y(3)*(AXY+GXY)
0022      AK(22)=AY*X(3)*X(3)+GXY*Y(3)*Y(3)
0023      AK(25)=AX*Y(2)*Y32+GXY*X(2)*X32
0024      AK(26)=AXY*Y(2)*X23+GXY*X(2)*Y23
0025      AK(27)=-AX*Y(2)*Y(3)-GXY*X(2)*X(3)
0026      AK(28)=AXY*X(3)*Y(2)+GXY*X(2)*Y(3)
0027      AK(29)=AX*Y(2)*Y(2)+GXY*X(2)*X(2)
0028      AK(31)=AXY*X(2)*Y23+GXY*Y(2)*X23
0029      AK(32)=AY*X(2)*X32+GXY*Y(2)*Y32
0030      AK(33)=AXY*X(2)*Y(3)+GXY*X(3)*Y(2)
0031      AK(34)=-AY*X(2)*X(3)-GXY*Y(2)*Y(3)
0032      AK(35)=-X(2)*Y(2)*(AXY+GXY)
0033      AK(36)=AY*X(2)*X(2)+GXY*Y(2)*Y(2)
0034      DO 10 J=1,6
0035      DO 10 I=1,J
0036      IJ=I+(J-1)*6
0037      JI=J+(I-1)*6
0038      10 AK(IJ)=AK(JI)
0039      DO 20 J=1,36
0040      20 AK(J)=AK(J)/2./S
0041      RFTJRV
0042      END

```

```

0001      SUBROUTINE TKPT(T)
0002      DIMENSION T(18)
0003      COMMON EX,EY,GXY,AMUPX,AMUPY
0004      COMMON X(4),Y(4),A,B
0005      X32=X(3)-X(2)
0006      Y32=Y(3)-Y(2)
0007      X23=-X32
0008      Y23=-Y32
0009      S=X(3)*Y(2)-X(2)*Y(3)
0010      DO 10 I=1,18
0011      10 T(I)=0.0
0012      T(1)=Y32
0013      T(3)=X23
0014      T(5)=X23
0015      T(6)=Y32
0016      T(7)=-Y(3)
0017      T(9)=X(3)
0018      T(11)=X(3)
0019      T(12)=-Y(3)
0020      T(13)=Y(2)
0021      T(15)=-X(2)
0022      T(17)=-X(2)
0023      T(18)=Y(2)
0024      DO 20 I=1,18
0025      20 T(I)=T(I)/S
0026      RFTJRV
0027      END

```



# B I B L I O G R A P H I E

- | 1 | J.H. ARGYRIS  
On the Analysis of complex elastic Structures.  
Applied Mechanics Review Vol.11, n°7,(july 1958)
- | 2 | J.S. PRZEMIENIECKI  
Theory of matrix structural Analysis  
Mac-Graw Hill, (1968)
- | 3 | O.C. ZIENKIEWICZ  
The finite element Method in structural and Continuum Mechanics  
Mac-Graw Hill, (1967)
- | 4 | E.C. PESTEL, F.A. LECKIE  
Matrix Methods in Elastomechanics  
Mac-Graw Hill, (1963)
- | 5 | J.H. ARGYRIS  
Recent Advances in matrix methods of structural Analysis  
Progress in Aeronautical Sciences, Vol 4.Pergamon Press,(1964)
- | 6 | F. DE VEUBEKE  
Matrix Methods of structural Analysis  
Pergamon Press (1964)
- | 7 | I.HOLLAND and K.BELL  
Finite element Methods in stress Analysis  
TAPIR (1969)
- | 8 | R.K. LIVESLEY  
Matrix Methods in structural Analysis  
Pergamon Press (1964)
- | 9 | H.I. LAURSEN  
Matrix Analysis of Structures  
Mac Graw Hill (1966)
- | 10 | B.G. NEAL  
Structural theorems and theirs Applications  
Pergamon Press (1964)
- | 11 | PIN CHUN WANG  
Numerical and Matrix Methods in structural Mechanics with Application  
to Computers.  
John Wiley and Sons (1966)
- | 12 | P.BECKERS and G.SANDER  
Calcul des tensions dans un fuselage par la méthode des éléments finis  
L'Aeronautique et l' Astronautique n°22, (1970)
- | 13 | P.SILVESTER  
High order polynomial triangular finite Elements for potential Problems  
Inst. J. Engng. Sci. Vol 7 Pergamon Press (1969)

- | 14 | ARANTES e OLIVEIRA  
Theoretical Foundations of the finite Element Method  
Inter.Journal of Solids and Structures -(October 1968)
- | 15 | JENNINGS  
A sparse matrix scheme for the computer Analysis of Structures  
Inst.J. Computer Math.(Jan. 1968)
- | 16 | MANDEL  
Mécanique des milieux continus, tomes I et II  
Gauthier- Villard (ed. 1966)
- | 17 | A.E.H. LOVE  
A Treatise an the mathematical Theory of Elasticity  
Dover Pub. 4° ed. (1944)
- | 18 | S.G. MIKHLIN  
Variational Methods in Mathematical Physics  
Pergamon Press (1964)
- | 19 | S.G. MIKHLIN, K.L.SMOLITSKIY  
Approximate Methods for Solution of differential and integral Equations  
Am. Elsevier Pub. Comp. (1967)
- | 20 | J.L. KRAHULA , J.F. POLHEMUS  
Use of Fourier series in the finite element Method  
AIAA Journal Vol 6, N°4 (1968)
- | 21 | J.H. ARGYRIS ,I FRIED, D.W. SHARP  
The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method  
Aeronautical Journal , June (1968)
- | 22 | T.H.H.PIAN, PIN TONG  
A variational Principle and the convergence of a finite element Method  
based on assumed stress distribution  
Inter.J. Solids and Structures Vol. 5 (1969)
- | 23 | B.M. IRONS  
Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods  
AIAA Journal Vol.4, n°11 (Nov 1966)
- | 24 | G.MEGARD  
Analysis of thin shells using planar and curved finite Elements  
Dpt of structural Mechanics, Norwegian Institute of Techn. Trondheim.  
Norway ( sept.1969)
- | 25 | S.H. MIRZAD  
Calcul des coques par une nouvelle technique aux éléments finis.  
Thèse, Faculté des Sciences de Paris (1968)
- | 26 | V.N FADDEEVA  
Computational Methods of Linear Algebra  
DOVER PUB (1959)
- | 27 | I.ERGATOUDIS, B.M. IRONS and O.C.ZIENKIEWICZ  
Curved, Isoparametric, quadrilateral Elements for Finite Element  
Analysis.  
Int. J. Solids and Structures Vol.4, (1968)

- | 28 | R.W.CLOUGH, J.L TOCHER  
Finite Element Stiffness Matrix for Analysis of Plate Bending dans  
" Matrix Methods in structural Analysis"  
Wright. Patterson Air Force Base, Report AFFDL TR 66.80 (Nov.1968)
- | 29 | P.C. DUNNE  
Complete polynomial Displacement Fields for Finite Element Method  
the Aeronautical journal of the Royal Aeronautical Society.Vol 72  
(Mars 1968 )
- | 30 | E.REISSNER  
On the Theroy of bending elastic Plates  
Journal of Math. Phys. 23 (1944 )
- | 31 | E.REISSNER  
The effect of transverseshear deformation on the Bending of elastic Plates  
Journal of applied Mechanics 12 (june 1945)
- | 32 | E.REISSNER  
On Bending of elastic plates  
(sans références) Aug. 1946
- | 33 | R.SOUCHE  
Sur la théorie de la flexion des plaques minces élastiques de E.Reissner  
Fac.Sciences de Poitiers, thèse( avril 1970)
- | 34 | E.REISSNER  
Contributions to the Problem of structural Analysis of sandwich-type  
plates and Shells.  
A I A A , T.I.S.
- | 35 | C.W. PRYOR, R.M.BARKER, D.FREDERICK  
Finite Element Bending Analysis of Reissner plates  
Journal of the Eng Mech. Div. Proceedings of the ASCE(Déc. 1970 )
- | 36 | W.M.JENKINS  
Matrix and Digital Computer Methods in structural Analysis  
Mac Graw Hill (1969)
- | 37 | R.H. GALLAGHER , I.RATTINGER , J.S. ARCHER  
A correlation study of Methods of Matrix structural Analysis  
Agardograph 69, Pergamon Press(1964.)
- | 38 | S.TIMOSHENKO , S.WOINOWSKY-KRIEGER  
Theorie des plaques et des coques  
Beranger (2° edition 1961)
- | 39 | N.POPPLEWELL, D.MAC DONALD  
Conforming rectangular and triangular plate-bending elements  
Journal of Sound and Vibration Vol 19, n°3 (Déc.1971)
- | 40 | B.R. NOTON  
A review of methods of composite construction
- | 41 | G.BRUNERET , Cdt G.MONTANTEMÉ  
Les nids d'abeille en alliage léger et leurs applications à la construc-  
tion sandwich.  
DOCAERO n°37 (mars 1956.)

- | 42 | R.F.S. HEARMON  
Applied anisotropic elasticity, Oxford Univ. Press,  
(1961)
- | 43 | F.J. PLANTENA  
Sandwich Construction  
John Wiley (1966)
- | 44 | C.LIBOVE, R.E. HUBKA  
Elastic constants for corrugated-core sandwich plates  
NACA TN 2289 (1951)
- | 45 | C.LIBOVE , S.B. BATDORF  
A general small deflection theory for flat sandwich plates  
Langley, Report n°899 (1950)
- | 46 | C.S. SMITH  
Bending, buckling and vibration of orthotropic plate beam structures  
Journal of Ship Research ( déc. 1968)
- | 47 | S.A. AMBARTSUMYAN  
Theory of anisotropic shells  
NASA Technical translation TT.F 118, (May 1964)
- | 48 | S.G. LEKHNITSKII  
Theory of elasticity of an anisotropic elastic body  
Holden- Days Séries (1963)
- | 49 | M.STEIN and J.MAYERS  
A small deflection theory for curved sandwich plates.  
NACA TN 2017 (1950)

## S O M M A I R E

### Introduction

### CHAPITRE I : METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### 11. Principe de la méthode

#### 12. Energie complémentaire de déformation.

12.1 Energie potentielle de déformation.

12.2 Travail des forces extérieures.

12.3 Energie complémentaire de déformation d'un volume  $\Omega$ .

#### 13. Matrices caractéristiques d'un élément.

13.1 Choix des déformées - Matrice connexion de l'élément.

13.2 Matrice intégrale de l'élément.

13.3 Matrice raideur de l'élément.

13.4 Forces nodales.

#### 14. Assemblage des éléments- Calcul de la structure.

#### 15. Application à des plaques et des coques.

15.1 Changement d'axes.

15.2 Matrice raideur et forces nodales.

15.3 Formation d'un quadrangle.

15.4 Assemblage de la structure.

15.5 Résolution du système linéaire.

### CHAPITRE II : DETERMINATION DE MATRICES RAIDEUR.

#### 21. Hypothèses de déformées.

#### 22. Elément rectangulaire en flexion pure:

22.1 Choix du développement de la flèche.

22.2 Détermination de la matrice raideur.

22.3 Calcul des forces nodales.

23. Eléments rectangulaires et triangulaires avec effet de cisaillement:

- 23.1 Importance du cisaillement.
- 23.2 Détermination de matrices raideur de flexion simple.
- 23.3 Calcul des forces nodales.

24. Eléments rectangulaires et triangulaires en extension.

- 24.1 Elément rectangulaire.
- 24.2 Elément triangulaire.
- 24.3 Calcul des forces nodales.

CHAPITRE III: APPLICATION A DES PLAQUES ET COQUES.

31. Comparaison avec des résultats exacts de plaques:

- 31.1 Plaque orthotrope en appui simple, sans effet de cisaillement.
- 31.2 Plaque appuyée-appuyée, avec effet de cisaillement.
- 31.3 Plaque infinie percée d'un trou circulaire, en traction uniforme.

32. Comparaison avec des résultats expérimentaux.

- 32.1 Mesure des constantes élastiques
- 32.2 Flexion d'une plaque encastrée.

33. Coque cylindrique sous pression intérieure.

- 33.1 Calcul des coques cylindriques chargée symétriquement.
- 33.2 Montage expérimental et résultats

Conclusion

ANNEXE I - Equations générales des plaques orthotropes et aspect énergétique.

11. Hypothèses.

12. Equations de base.

- 12.1 Relations d'équilibre.
- 12.2 Déplacements et déformations de la surface moyenne.
- 12.3 Relations forces-déplacements.

13. Equations différentielles.

13.1 Flexion

13.2 Extension

13.3 Conditions aux limites

14. Energie potentielle de déformation

15. Minimisation de l'énergie complémentaire de déformation

15.1 Flexion

15.2 Extension

ANNEXE II . Etude de plaques orthotropes, rectangulaires, chargées transversalement.

21. Plaque en appui simple, sans effet de cisaillement.

22. Plaque rectangulaire avec effet de cisaillement.

ANNEXE III. Calcul d'une plaque orthotrope en contraintes planes.

ANNEXE IV . Calcul des coques cylindriques, orthotropes, sous pression constante.

ANNEXE V . Sous-programmes.

Bibliographie.

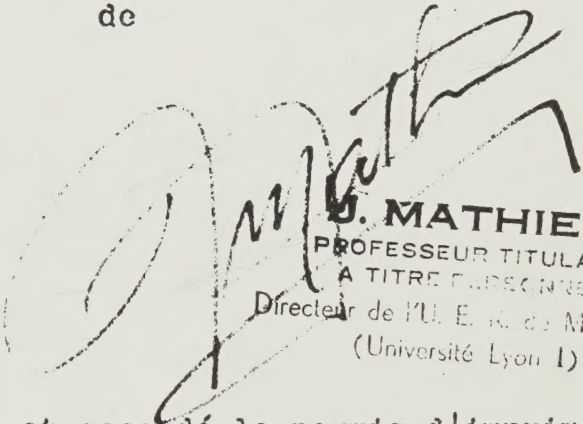


Vu.

Les membres du jury :

Vu et approuvé.

Le Directeur de l'U.E.R.  
de

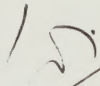
  
**J. MATHIEU**  
PROFESSEUR TITULAIRE  
A TITRE PERSONNEL

Directeur de l'U. E. R. de Mécanique  
(Université Lyon I)

Vu et accordé le permis d'imprimer.

Lyon, le 19 avril 1972

Le Président de l'Université  
Claude Bernard,

  
J. BOIDIN

Yu.

Les membres du Jury :

Yu et adjoint  
le Président de l'U.S.P.  
de

MATTHEU

PROFESSEUR D'ANALYSE

A L'UNIVERSITE DE LYON

Docteur en Sciences Mathématiques

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours

Chargé de Cours



